EUCLIDES

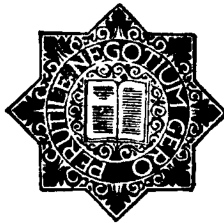
TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

9e JAARGANG 1932/33, Nr. 5



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☞ **Van het artikel van Dr. Schamhardt zijn overdrukken gemaakt, die à f 1.— fr. p. p. worden geleverd. Postgiro nr 6593 P. Noordhoff, Groningen.**

---

wil ons teen alle prys vermy; immers, die nuwe opvatting van die vak moet dit juis uit sy statiese diskreetheid van waterdigte kompartementjies opvoer in 'n dinamiese wordingsproses van funksionele verband en veranderlikheid. Daarom moet ons sorg dra om dwarsdeur die leergang die regte koers te hou.

'n Verkeerde opvatting wat nog dikwels aangetref word is dat grafiese voorstellinge as afsonderlike onderwerp behandel moet word. Dit kom dan vroeër of later aan die beurt, word behandel en . . . afgehandel. Liewer nooit van 'n grafiese voorstelling gerep as so'n mishandeling daarvan. Die grafiek moet ter sprake kom sodra van 'n formule gewaag word, d.i. in die eerste algebrales. Soos die kennis van die hoofbewerkinge toeneem sal die formule meeropvattend word en ook die grafiek belangriker dienste gaan bewys. Die heer Beth gee 'n mooi verduideliking van die geleidelike opbou van die grafiese voorstelling en ek hoef daar niks by te voeg nie. Ek wil egter 'n ander punt aanroer, nl. die gewigtige rol van formule en grafiek by die ontwikkeling van die begrippe, veral van die getalbegrip.

Wanneer die leerling met die studie van algebra moet begin ken hy nog alleen die ongerigte getal. Hy leer nou om letters as getallesimbole te beskou. Die letters vervang (vir hom) ongerigte getalle. $a-b$ het vir hom alleen betekenis wanneer b kleiner is as a. Hier kom die leerling voor die eerste uitbreiding van sy getalbegrip te staan. Dis egter nodig dat hy duidelik die behoefte aan sodanige uitbreiding sal besef en die besef kan by hom op baie geskikte manier deur manier deur middel van grafiese voorstellinge aangebring word. Sy grafiek is nog beperk tot een kwadrant. Hij tabuleer verskillende eenvoudige funksies, soos $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ ens.. Die tweede voorbeeld is veral leersaam. Waardes van a, b en c word so gekies dat in sommige gevalle die „hele" parabool verskijn, in andere weer 'n gedeelte (of die hele) ontbreek. As hij al bekend is met die sinus, cosinus en tangens funksies (0° — 90°), teken hy ook hulle grafiese voorstellinge. Tussen hakies kan hier bygevoeg word dat 'n vroeë invoering van die genoemde goniometriese funksies van besondere waarde is as die funksiebegrip tot sy reg moet kom.

Hierdie „onaffe" grafieke dien as 'n magtige prikkel om by die leerling die noodwendigheid van uitbreiding tuis te bring. Dit word nog versterk as hy merk dat die vergelijking $ax + b = 0$ soms 'n

gebeuren van het intellect de *temporeele verschijnselreeks van willekeurige multipliciteit* ontstaan.

Causale aandacht vervolgens is *fantazeering der identificeering van verschillende verschijnselreeksen*, en een zoodanige fantazie wordt een *causale reeks* genoemd. Als bijzonder geval der causale aandacht treedt op de fantazeering van *objecten*, d.w.z. van instandblijvende (enkelvoudige of samengestelde) eenheden der aanschouwingswereld. Door het ontstaan van objecten (waartoe ook de eigen persoonlijkheid en de medemenschen behooren) wordt de aanschouwingswereld zelf eveneens min of meer gestabiliseerd. Sterk uiteenloopend zijn de objecten ten aanzien van hun graad van *eigenheid* of *egoïciteit*, d.w.z. van aanvaarding van het verlangen naar hun stabiliteit als richtende kracht van den vrijen wil.

Dat wiskundige beschouwing geen noodzaak, doch een aan den vrijen wil onderworpen levensverschijnsel is, daarvan kan ieder bij zichzelf de inwendige ervaring opdoen: ieder mensch kan naar willekeur hetzij zich zonder tijdsgewaarwording en zonder scheiding tusschen Ik en Aanschouwingswereld verdroomen, hetzij de genoemde scheiding door eigen kracht voltrekken en in de aanschouwingswereld de condensatie van aparte dingen in het leven roepen. En even willekeurig is de zich nooit als onvermijdelijk opdringende identificeering van verschillende temporeele verschijnselreeksen.

De eenige rechtvaardiging der wiskundige beschouwing is gelegen in de *doelmatigheid* der op haar berustende „*wiskundige handeling*," waartoe de causale aandacht den mensch in staat stelt, en die hierin bestaat, dat van een causale reeks een later verschijnsel, dat instinctief wordt verlangd, maar niet door middel van een directen impuls in het leven kan worden geroepen (het *doel*), indirect in koele berekening wordt *geforceerd*, door een vroeger verschijnsel uit de reeks, dat wellicht op zichzelf niets begeerenswaards bevat (het *middel*), te doen plaatsvinden, en zoodoende het gewenschte verschijnsel in aansluiting daaraan als *gevolg* op den duur eveneens tot stand te brengen.

Ook de verrichting van wiskundige handelingen en de keuze der daarmee na te streven doelen zijn onderworpen aan den vrijen wil. In de keuze der doelen komt in het bijzonder de rangorde der

objecten naar egoïciteit tot uitdrukking. De duidelijkheid dezer rangorde is zelfs een onmisbare voorwaarde voor alle wilsinitiatief; waar ze wordt uitgewischt, kan de verdrooming nog slechts voor automatische gewoontehandelingen worden verlaten.

Uit den aard der zaak kan voor een causale reeks geen sprake zijn van een ander bestaan, dan als begeleidende fantazie eener tot wiskundige handelingen voerende gerichtheid van den menschelijken wil, kan er derhalve van het bestaan van een causalen samenhang der wereld onafhankelijk van den mensch geen sprake zijn. Integendeel, de zoogenaamde causale samenhang der wereld is een donkere kracht der gedachte in dienst eener donkere wilsfunctie der menschheid, die daardoor, als door afwolking van een bedwelmend gas, de aanschouwingswereld tegenover haar weerloos en voor haar verlangens stormrijp tracht te maken.

Als consequentie der causale aandacht tracht de mensch reeds op de laagste cultuurtrappen zijn causale invloedssfeer te stabiliseeren en daartoe een aan hem onderworpen g e b i e d v a n o r d e te scheppen, waarbinnen hij ten eerste de hem dienstbare causale reeksen i s o l e e r t, d.w.z. tegen storende nevenverschijnselen beschut, en ten tweede nieuwe causale reeksen in het leven roept, eenerzijds door den bouw van nieuwe duurzame objecten en instrumenten, anderzijds door de min of meer georganiseerde onderwerping van den wil zijner medeschepselen aan zijn eigen wil.

2. Tot volle ontwikkeling komt echter het bedrijf der wiskundige handelingen eerst op hoogere cultuurtrappen, en wel door middel van de w i s k u n d i g e a b s t r a c t i e, die de tweeheid van allen inhoud ontdoet, en daarvan slechts den ledigen vorm als gemeenschappelijk substraat van alle tweeheden overlaat. Dit gemeenschappelijk substraat van alle tweeheden vormt de o e r i n t u ï t i e d e r w i s k u n d e, die door haar zelfontvouwing het oneindige als gedachtenvorm invoert, en op hier verder buiten beschouwing blijvende wijze eerst de verzameling der natuurlijke getallen, vervolgens die der reëele getallen, en ten slotte de geheele zuivere wiskunde, of kortweg wiskunde levert.

De machtige werking der wiskundige abstractie berust hierop, dat vele causale reeksen aanmerkelijk gemakkelijker kunnen worden beheerscht, als men hun inhoudlooze abstracties als deelsystemen van uitgebreidere, doch meer overzichtelijke wiskundige systemen opvat. Op deze wijze kunnen n.l. de binnen het uitgebreidere systeem

DIE FUNKSIEBEGRIP EN DIE GRAFIESE VOORSTELLING

DOOR

Prof. D. J. VAN ROOY.

Ek het met belangstelling kennisgeneem van die artikel van die heer H. J. E. Beth oor „de denkmoeilijkheden, gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen" in Nr. 1 van die lopende jaargang van Euclides. Wat my veral getref het is:

(1) die manier waarop hy in sy ontleding van die moeilikhede die funksie en die grafiese voorstelling as 'n eenheid laat saamgroei en ontwikkel;

(2) sy opvatting oor die beskouing dat die vergelijking die onderwerp van die klassieke skoolalgebra is;

(3) sy beskouinge oor die (eventuele) invoering van die infinitesimaalrekening op die middelbare skool.

Ek kan my grotendeels verenig met die gedagtes wat deur die heer Beth uitgespreek word. Graag wil ek een en ander ter aanvulling gee, met die vooropstelling dat ek in die eerste plek die oog het op suid-afrikaanse toestande. Tog meen ek dat hierdie onderwerp vandag so algemeen bespreek word dat ek nie gevaar loop om deur hierdie selfopgelegde beperking te veel afbreuk aan die belangstelling van die Nederlandse leser van Euclides te doen nie.

Funksie en grafiek vorm vandaag die brandpunt van die algebraonderwys op die middelbare skool, en tereg ook. Dit het 'n swaartepuntsverskuiving veroorsaak wat nuwe vérgesigte geopen het. Geen wonder dat die invoering van die infinitesimaalrekening tot die moontlikhede gaan behoort het nie; ons kon dit verwag: dis die logiese konsekwensie van die nuwe gesigspunt. Tog is dit nodig dat ons ons nie gaan vergaloppeer nie. Tensy hierdie saak met die nodige versigtigheid en omsigtigheid aangepak word bestaan daar gevaar van verloop tot nuwe formalisme en verstarring. Dit tog

Speisersche Buch[1] vielleicht noch nicht genügend bekannt geworden ist, es anderseits aber gerade durch den Abdruck dieser Eulerschen Arbeit für das Privatstudium mathematisch interessierter Schüler der oberen Klassen sehr geeignet ist.

Aehnliches gilt von der oben genannten Eulerschen Arbeit, in der die uns hier interessierende Identität abgeleitet wird. Euler zeigt zunächst:

I. Wenn $p = a^2 + b^2$, dann ist auch $4p$, $9p$, $16p \ldots$ eine Summe zweier Quadratzahlen. Beweis einfach: $4p = (2a)^2 + (2b)^2$.

II. Wenn $p = a^2 + b^2$, dann ist auch $2p$ und allgemein $2n^2p$ Summe zweier Quadratzahlen; denn $2p = 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$ und $2n^2p = n^2(a+b)^2 + n^2(a-b)^2$.

III. Wenn $2p = a^2 + b^2$, dann folgt

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2; \text{ denn } a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Dann fährt er fort:

„Deinde notatu dignum est sequens theorema, quo natura numerorum, qui sunt summae duorum quadratorum, non mediocriter illustratur."

Wenn $p = a^2 + b^2$ und $q = c^2 + d^2$, dann ist, wie Euler durch Ausmultiplikation zeigt, $pq = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ oder $pq = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$; also z.B. $5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2) \cdot (3^2 + 2^2) = (1.3 + 2.2)^2 + (2.3 - 1.2)^2 = 49 + 16 = (2.2 - 1.3)^2 + (2.3 + 1.2)^2 = 1 + 64$.

Dieses Zahlenbeispiel findet sich schon bei Diophant, worauf ich weiter unten noch zu sprechen komme.

Besteht das Produkt aus mehreren Faktoren, deren jeder eine Summe von zwei Quadratzahlen ist, so kann es auf mehrfache Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, was Euler an dem Beispiel $1105 = 5.13.17$ zeigt, für das er ohne nähere Ausführungen die vier Zerlegungen angibt:

$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$. Wir haben hier ein ausgezeichnetes Uebungsmaterial für den Unterricht, das verschiedene lehrreiche Ueberlegungen veranlassen kann. Die vier Zerlegungen in die Summe zweier Quadrate lassen sich z.B. dadurch gewinnen, dass man zwei Faktoren vereinigt und damit ein Produkt erhält, dessen Faktoren schnell als zerlegbar erkannt

organisatie op zichzelf, uit den aard der zaak moeilijk valt, den bestaanden vorm daarvan en hun eigen plaats daarin als de eenig juiste te erkennen.

Om nu binnen de georganiseerde menschengroepen, bij de geringe ter beschikking staande dressuurmiddelen, aan de gevoelens van trouw en tevredenheid nog een zoo groot mogelijke mate van stabiliteit te verzekeren, neemt de organisatie haar toevlucht tot de propaganda van m o r e e l e t h e o r i e ë n, d.w.z. van wiskundige beschouwingen, die de juistheid en de noodzakelijkheid der bestaande organisatie niet alleen op voor het egoïstische begrip toegankelijke gemeenschappelijke doelstellingen en noodtoestanden doet berusten, doch ook op moreele, d.w.z. zich aan het egoïstisch begrip onttrekkende waardeëlementen van levenshouding. Klassieke voorbeelden hiervan worden geleverd door religieuse voorschriften en begrippen als vaderland, eigendom, familie, solidariteit, klassebewustzijn, eer en plicht. Tot het vestigen van het bestaande prestige der moreele waarden zou intusschen de groepspropaganda, die daarbij haast uitsluitend op de middelen der suggestie is aangewezen, nimmer toereikend zijn geweest, zoo ze niet ondersteund werd door de stille werking van die wiskundige beschouwingen der afzonderlijke individuen, die verhindering van het ongewenschte succes der egoïstische drijfveren van anderen als eindschakel bezitten.

De wilsoverdracht tot arbeid en dienstbaarheid komt op de primitiefste cultuurtrappen en in de primitiefste verhoudingen van mensch tot mensch door een eenvoudig gebaar tot stand, waarbij emotioneele natuurklanken der menschelijke stem een overwegende rol spelen. Bij ingrijpender organisatie van menschelijke maatschappen daarentegen is de op te leggen arbeid te zeer gedifferentieerd en te gecompliceerd, om uitsluitend door zoodanige enkelvoudige toeroeping te kunnen worden in gang gezet en gehouden. Om onder deze omstandigheden den arbeid niettemin door middel van verzoekende of bevelende (gesproken of geschreven) teekens te kunnen regelen, wordt het geheel der wetten, verordeningen, objecten en theorieën, betrokken bij de wiskundige handelingen, die van de dienstbaren worden verlangd, aan een wiskundige beschouwing, de l i n g u ï s t i s c h e wiskundige beschouwing, onderworpen. Aan de elementen van het de uit deze wiskundige beschouwing geboren wetenschappelijke theorie dragende wiskundige systeem, worden l i n g u ï s t i s c h e e l e m e n t a i r t e e k e n s toegeordend, met

welke als grondslag, naar aan de genoemde wetenschappelijke theorie ontleende g r a m m a t i c a l e r e g e l s, de georganiseerde t a l e n der beschaafde menschenmaatschappen de aldaar noodige gedifferentieerde en gecompliceerde wilstransmissies mogelijk maken. Uit den aard der zaak zijn de aan talen ten grondslag liggende wetenschappelijke theorieën geenszins exactwetenschappelijke theorieën. Integendeel, van de stabiliteit en exactheid, die naar grammatica en woordenboek een taal formeel schijnt te bezitten, gaat in de practijk daarom een groot deel te loor, omdat het practische leven veel meer elementaire begrippen eischt, dan de taal elementaire woorden en verbindingswijzen van woorden heeft te bieden. Anderzijds is stabiliteit en exactheid der taal daarom in de practijk niet noodig, omdat collectieve wil en dressuurautomatisme de menschen tot goede verstaanders hebben gemaakt, die aan een half woord genoeg hebben.

Is de taal oorspronkelijk en in de eerste plaats een functie der activiteit van den maatschappelijken mensch, zoo heeft ze niettemin ook bij de bezinning en mnemotechniek der eenzaamheid van den afzonderlijken mensch beteekenis, eenerzijds uit gewoonteautomatisme van taalgebruik, anderzijds door de rol, die wetenschap en maatschappelijke organisatie nawerkend blijven spelen, ook in de gedachtenwereld der eenzaamheid.

4. Al het tot nog toe gezegde is r e d e l ij k e b e z i n n i n g, d.w.z. wiskundige beschouwing, waarin nòch van doelstellingen, nòch van objecten der aanschouwingswereld de i n h o u d aan de orde komt. Het is een essentieele hypothese van alle verstandhouding tusschen menschen, dat deze redelijke bezinning een voor alle individuen overeenstemmende structuur bezit. Ze vertegenwoordigt daarom een eminente maatschappelijke waarde ter voorkoming van verwarring bij het vastleggen der grondbeginselen der maatschappelijke organisatie, en derhalve ter consolideering van het maatschappelijk leven.

Van geheel anderen en veel meer individueelen aard is m o r e e l e b e z i n n i n g. Deze toetst zoowel de objecten der aanschouwingswereld als het wiskundig gebeuren zelf ten opzichte hunner egoïciteit, en in verband daarmede ten opzichte van hun bestaansrecht als bronnen van richtende kracht van den vrijen wil. Het verband tusschen de zich voordoende mogelijkheden van doelstelling en de eigen even duidelijke als duistere levensbestemming

DIDAKTISCHE UND HISTORISCHE BEMERKUNGEN ÜBER EINE VON GAUSZ ZUM NUMERISCHEN RECHNEN BENUTZTE IDENTITÄT

VON

WILHELM LOREY in Leipzig.

In seiner *Methodik des mathematischen Unterrichts,* [1]) ebenso wie schon früher in seiner Abhandlung *die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauß* [2]) erwähnt Herr Philipp Maennchen eine von Gauß zum numerischen Rechnen benutzte Identität:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Diese Identität, deren Richtigkeit nachzuweisen schon eine gute Uebung für den mathematischen Unterricht der mittleren Klassen ist, die numerisch zu prüfen und anzuwenden von Herrn Maennchen mit Recht auch schon für den Rechenunterricht der unteren Klassen vorgeschlagen wird, ist Gauß vermutlich aus dem in seinem 18. Lebensjahr eifrig begonnenem Studium Eulerscher Schriften bekannt geworden. Sie findet sich in der Tat in einer in der Petersburger Akademie veröffentlichten Abhandlung „De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum" die jetzt durch die im Erscheinen begriffene grosse Eulerausgabe bequem zugänglich ist. Die Abhandlung steht im ersten Band der auf 4 Bände berechneten zahlen-theoretischen Arbeiten Eulers [3]). Die bis jetzt vorliegenden, von dem inzwischen leider verstorbenen F. Rudio herausgegebenen 2 Bände enthalten eine Fülle von Anregungen, die mir für den mathematischen Schulunterricht geeignet erscheinen. Herr Speiser hat in seiner schönen Sammlung *„Klassische Stücke der Mathematik"* [4]) aus dem 2. Band die Sätze über Potenzreste, als „der grundlegenden Leistung des 18. Jahrhunderts" in deutscher Sprache gebracht, worauf ich hier besonders hinweisen möchte, weil das

richt ganz besonderer Beachtung wert erscheinen, wegen ihrer Mahnung zum vorsichtigen Schliessen. Es handelt sich um die Umkehrung der Identität:

Wenn das Produkt pq die Summe zweier Quadratzahlen ist, so kann durch „keine Regel der Logik, noch aus der Sache selbst geschlossen werden, dass auch die Faktoren diese Eigenschaft haben". Das zeigt schon das Beispiel: $45 = 36 + 9$, wobei von den Faktoren 3 und 15 keiner in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden kann.

Wenn aber ausser dem Produkt auch der eine Faktor eine Summe zweier Quadrate ist, so ist es durchaus *nicht* selbstverständlich, dass auch der andere Faktor diese Eigenschaft hat. Die Fehlerhaftigkeit eines solchen Schlusses zeigt der entsprechende Schluss: falls ein Produkt gerade und ein Faktor gerade ist, ist auch der andere Faktor gerade; wer so schlösse, würde sich heftig täuschen. „Si quis autem hinc concludere velit, is vehementer falleretur."

Es ist also ein sehr sorgfältiger Beweis für die Umkehrung nötig. Euler sagt:

„demonstratio quidem, quam inveni, ita comparata videtur, ut non mediocrem vim ratiocinii requirat."

Es folgt Satz 1:

Wenn das Produkt $p \cdot q$ die Summe zweier Quadratzahlen ist und der eine Faktor p eine Primzahl mit der gleichen Eigenschaft, so ist auch der andere Faktor q als Summe zweier Quadrate darstellbar:

Beweis: Es sei $pq = a^2 + b^2$ und $p = c^2 + d^2$, wo c und d teilerfremd sind, da p als Primzahl vorausgesetzt wird. Wegen $q = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ wird der Zähler $a^2 + b^2$ durch den Nenner $c^2 + d^2$ teilbar, ebenso auch $c^2 . (a^2 + b^2)$ und $a^2 . (c^2 + d^2)$, folglich auch die Differenz der beiden letzten Ausdrücke: $b^2 . c^2 - a^2 . d^2 = (bc + ad) . (bc - ad)$ durch $c^2 + d^2$ teilbar. Da aber nach Voraussetzung $c^2 + d^2$ eine Primzahl ist, muss also einer der Faktoren durch $p = c^2 + d^2$ teilbar sein. Wir können daher setzen: $bc \pm ad = mc^2 + md^2$. Was nun auch a und b für Zahlen sind, so lassen sich immer positive oder negative Zahlen x und y finden, sodass $b = mc + x$ und $a = md + y$ ist. Durch Einsetzen ergibt sich notwendig $cx \pm dy = 0$, oder $\frac{x}{y} = \mp \frac{d}{c}$. Da d und c als

ruimtetijdwereld practisch eenstemmig te aanvaarden bleek voor alle linguïstisch geschoolde individuen.

Nu gingen evenwel de logische principes eveneens op, wanneer men ze uitbreidde tot de taal der wetenschap en tot de taal van talrijke verdere gebeurlijkheden van het practische leven, althans zoolang men zich daarbij tot zulke verschijnselen beperkte, die door natuurwetten werden beheerscht, op welker onwankelbaarheid men had leeren vertrouwen. Dit gaf aanleiding tot de lichtvaardige inductie, dat men zich op de juistheid van door middel van logische principes afgeleide affirmaties ook dan kon verlaten, wanneer ze voor geen directe contrôle vatbaar bleken. In het bijzonder werd ook in het principium tertii exclusi zoodanig vertrouwen gesteld, zelfs in de uitgebreidere interpretatie, waarbij wordt aangenomen, dat een vroegere gebeurtenis daadwerkelijk heeft plaatsgevonden, niet slechts als het ongerijmd, doch ook als het practisch onmogelijk is, voor een bepaald vaststaand feit een andere verklaring te vinden. Op dit vertrouwen berusten niet slechts theoretische wetenschappen als palaeontologie en kosmogonie, doch ook regelen van staatsinrichting als het procédé der strafvordering. En het geloof aan de logische principes is dermate onaantastbaar geworden, dat telkens wanneer ze tot kennelijk onjuiste resultaten voerden, hierin steeds slechts aanleiding werd gevonden, om de bij de gevolgde redeneering vooronderstelde feiten of natuurwetten te wijzigen, nimmer echter om aan de logische principes het vertrouwen op te zeggen. Bij dit alles werd geheel uit het oog verloren, dat de geconstateerde practische veiligheid der logische principes slechts neerkwam op practische geldigheid der verbindingswetten der affirmaties der eindigheidswiskunde bij de beschrijving van verschijnselen der aanschouwingswereld, derhalve op de omstandigheid, dat de menschen een belangrijke complex van objecten en mechanismen der aanschouwingswereld met betrekking tot een belangrijke complex van feiten en gebeurtenissen met succes beheerschen, door het systeem der toestanden in de ruimtetijdwereld dezer objecten en mechanismen te beschouwen en te behandelen als deel eener eindige discrete verzameling, welker elementen door een eindig aantal relaties zijn verbonden. In plaats van hier eenvoudig het wonderlijke waarnemingsfeit te registreeren, dat door een groot deel der aanschouwingswereld in zijn door de menschen geschapen eindige organisatie veel meer trouw en tevredenheid wordt aan den dag

gelegd, dan door de organisaties die de menschen zichzelf gegeven hebben, was men voor deze nuchtere interpretatie blind, en kon in volslagen miskenning van het wezen van het woord als middel tot wilsoverdracht, de opvatting ontstaan en inwortelen, dat woorden aanduidingsmiddel zijn voor onafhankelijk van de taal en van de causale aandacht der menschen duurzaam en onaantastbaar bestaande entiteiten met fetischkarakter, „b e g r i p p e n” genaamd, tusschen welke even duurzaam en onaantastbaar bepaalde, door de logische principes als aprioristische wetten onderling samenhangende, relaties zouden bestaan. Hiervan is de consequentie, dat relaties tusschen begrippen, die met behulp van de logische principes zijn afgeleid uit onloochenbare axioma's, d.w.z. uit relaties tusschen begrippen, beantwoordende aan constateeringen van onloochenbare feiten of natuurwetten, zoo zij met contrôleerbare affirmaties over de aanschouwingswereld correspondeeren, deze contrôle glansrijk zullen kunnen doorstaan, en in het tegenovergestelde geval met even groote veiligheid als i d e ë e l e w a a r h e d e n kunnen worden beschouwd. Zulke ideëele waarheden zijn dan ook eeuwen lang met zelfvertrouwen en vlijt door de philosophen gededuceerd. En wanneer de bij deze deductie nu en dan als onbehagelijk incident optredende figuur der contradictie twijfel aan de juistheid der gevolgde redeneeringen deed ontstaan, betrof deze twijfel nimmer de betrouwbaarheid der logische principes, doch uitsluitend de onloochenbaarheid der axioma's, d.w.z. der relaties tusschen begrippen, die aan de redeneeringen ten grondslag lagen. Talrijk zijn dan ook de axioma's, die, juist op grond van de bij de er uit afgeleide ideëele waarheden optredende contradicties, in den loop der tijden weer zijn verworpen of gewijzigd.

Wat de bovengenoemde pogingen tot linguïstische saneering der wiskunde betreft, deze hebben als volgt in het geloof aan de logische principes hun historisch ontstaan gevonden: Bij de studie der zuivere wiskunde zijn de wiskundigen, ook waar over oneindige systemen werd gehandeld, begonnen met in navolging van de philosophen uit de taal der eindigheidswiskunde de logische principes over te nemen, en op het nieuwe gebied zonder reserve toe te passen. Aldus werd, in het bijzonder sinds de wiskunde der oneindige systemen door de ontdekking der verzamelingsleer haar groote vlucht had genomen, voor de door het comprehensie-axioma ge-

Jedes der 2 Paare $X_i Y_i$ liefert also zwei Zerlegungen von mp_{r+1}. Die Zahl $p_1 . p_2 \ldots p_{r+1}$ ist demnach in genau 2^r Arten als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, die untereinander verschieden sind. Wäre nämlich für zwei verschiedene Marken $k \neq l$ $(X_k^2 + Y_k^2) p_{r+1} = (X_l^2 + Y_l^2) p_{r+1}$, so wäre $X_k^2 + Y_k^2 = X_l^2 + Y_l^2$, was gegen die Voraussetzung wäre, dass bis zu dem angenommenen r unser Satz richtig ist, d.h. genau 2^{r-1} verschiedene Zerlegungen der Zahl m in die Summe zweier Quadrate gestattet.

Da nun unser Satz für $r = 1$, wie weiter unter bewiesen wird, richtig ist, gilt er auch für $r = 2, 3$ usw.

Lässt sich auf der Mittelstufe die Richtigkeit der Identität durch gewöhnliches Ausmultiplizieren nachweisen, so empfiehlt sich für die Oberstufe vielleicht das elegante Verfahren, das Lagrange in seinen „Erläuterungen zu Eulers Algebra", [8]) die auch für mathematisch interessierte ältere Schüler zum Privatstudium sehr zu empfehlen sind, allgemein angewandt hat zur Berechnung eines Produktes $(x + \alpha y) . (x + \beta y)$, wo α und β die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit gegebenen Koeffizienten sind.

Spezialisiert auf unseren Fall erhalten wir mit $i = \sqrt{-1}$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di).$$

Verbindet man in dem Produkt rechts den ersten mit dem vierten Faktor, den zweiten mit dem dritten, so folgt:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd - i[ad - bc])(ac + bd + i[ad - bc]),$$

also mit $ac + bd = u$, $i\,(ad - bc) = v$, nach der schon auf der Unterstufe zum numerischen Rechnen benutzbaren Identität $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Vereinigt man den ersten und dritten Faktor, sowie den zweiten und vierten, so folgt entsprechend:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Bei der Uebung an Zahlenbeispielen empfehle ich auch Faktoren der Form $4n + 3$ zu wählen, bei denen eine Zerlegung in die Summe zweier Quadratzahlen nicht gelingt, was hier als eine induktive Entdeckung bei den Schülern gewiss Interesse erregt. Spielt doch überhaupt die Induktion in diesem Gebiet eine grosse Rolle, was Euler wiederholt ausgesprochen hat, z.B. in der Abhandlung *Specimem de usu observationum in mathesi pura.* [9])

Bei Euler folgen nun einige Bemerkungen, die mir für den Unter-

$4n + 1$ auf ihren Primzahlcharacter zu untersuchen. Er findet so z.B. 82421, 100981 und 262657 als Primzahlen, dagegen $1000009 = 293 \cdot 3413$, $233033 = 467 \cdot 499$, $32129 = 361 \cdot 89$ als zerlegbar.

Das sehr sinnreiche Verfahren wird von Euler an den Beispielen ausführlich erläutert, und er sagt wohl mit Recht, dass die Faktoren auf keine andere Weise so schnell gefunden werden könnten.

Für die Schule möchte ich ein Experimentieren mit kleineren Zahlen vorschlagen, etwa durch Konstruktion einer Tabelle wie oben angegeben, oder aber auch durch eine graphische Methode, indem man die Gleichung $m = x^2 + y^2$ als Mittelpunktsgleichung eines Kreises ansieht und die Gitterpunkte, d.h. die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten aufsucht. Der Radius lässt sich sofort aus einem geeigneten Koordinatenpaar abgreifen; z.B. kann für $m = 65 \quad x = 4 \quad y = 7$ genommen werden.

Umgekehrt kann man aber auch das Verfahren benutzen, um die Genauigkeit des quadratischen Koordinatenpapiers zu erproben.

Die Identität $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$ wird gelegentlich in Veröffentlichungen aus neuerer Zeit, die sich mit ihrer Verallgemeinerung beschäftigen, als „Eulersche Identität" bezeichnet. Das ist aber historisch nicht richtig. Diese Identität hat nämlich schon der berühmte italienische Mathematiker des 13. Jahrhunderts Leonardo Pisano gekannt, was nicht nur eine Vermutung ist, wie S. Günther in seiner Geschichte der Mathematik[10]) sagt, sondern sich wörtlich belegen lässt. Im *Liber Quadratorum* findet sich der Satz.[11])

„Si quatuor numeri non proportionales proponentur et si primus minor secundo, et terzius minor quarto et aggregatus e quadratis primy et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertiy et quarti, et neuter ex aggregatis quadratus fuerit, egredietur numerus, qui duobus modis equalitur duobus quadratis numeris."

Leonardo erläutert die zwei Zerlegungen dann an einem Beispiel, das tatsächlich auf die Identität herauskommt.

Die Identität findet sich aber auch schon nach Zeuthen[12]) bei dem 598 n. Chr. geborenen indischen Mathematiker Brahmagupta, und zwar in einer auch für die Schule interessierenden geometrischen Behandlung, die die Identität geometrisch erläutert, und eine Beziehung zum Ptolemaeischen Lehrsatz vom Sehnenviereck herstellt. Brahmagupta geht von zwei rechtwinkligen Drei-

kundig onderzoek en de wiskundige gedachtenwisseling slechts dan haar mnemotechnische, denkeconomische en verstandhoudende rol met practisch aanvaardbare betrouwbaarheid zal kunnen vervullen, indien bij haar gebruik iedere niet tot een welomschreven eindig systeem beperkt blijvende toepassing van het principium tertii exclusi wordt vermeden. Dit inzicht, waardoor de zoogenaamde intuïtionistische beoefening der wiskunde wordt geleid, heeft tengevolge van de historische ontwikkeling van het gezag der logica, in de klassieke wiskunde ontbroken. In de klassieke wiskunde heeft dientengevolge niet alleen in den loop der eeuwen het geloof aan tal van stellingen ingang gevonden, waarvan sindsdien het intuïtionisme de onjuistheid heeft aangetoond, doch bovendien zijn op haar basis gedurende de laatste halve eeuw verschillende uitvoerige vermeende wiskundige theorieën ontstaan, waaraan door het intuïtionisme iedere wiskundige beteekenis moet worden ontzegd. In het algemeen doet het intuïtionisme de wiskunde een algeheele omwerking ondergaan, een omwerking, waarbij zij helaas op vele plaatsen haar soepel en elegant karakter moet verliezen, en in veel stroever, gewrongener en ingewikkelder vormen heeft te treden. Doch de sferen der waarheid zijn nu eenmaal minder permeabel, dan die der illusie.

Om de intuïtionistische omwerking der wiskunde door eenige eenvoudige voorbeelden te illustreeren, beschouwen we in de eerste plaats de zoogenaamde hoofdstelling der algebra, die zegt dat elke hoogeremachtsvergelijking althans één wortel bezit. Alle bewijzen der klassieke wiskunde voor deze stelling hebben het principium tertii exclusi gebruikt. Een der meest bekende bewijzen gaat b.v. zoo te werk, dat de onderstelling, dat een geheele rationale functie eener complexe veranderlijke in het complexe vlak een begrensd waardegebied zou bezitten, ad absurdum wordt gevoerd. Aan een ander klassiek bewijs ligt de onderstelling ten grondslag, dat de discriminant eener hoogeremachtsvergelijking óf gelijk is aan nul óf in absolute waarde grooter is dan een aanwijsbaar van nul verschillend rationaal getal. En alle andere tot voor een tiental jaren gangbare bewijzen zijn aan een analoge kritiek onderhevig. Dientengevolge moest de intuïtionistische wiskunde de formuleering der hoofdstelling der algebra als een zinlooze woordcomplex beschouwen, totdat ze er in slaagde, een algorithmus te construeeren,

met behulp waarvan men, althans voor een omvangrijke groep van hoogeremachtsvergelijkingen, uit de coëfficienten een wortel kan berekenen.

Tot het opstellen van een groep van verdere voorbeelden voeren we in de intuïtionistische begrippen van vluchtende eigenschap en van slingergetal eener vluchtende eigenschap. Een vluchtende eigenschap is een eigenschap, waarvan voor een willekeurig natuurlijk getal hetzij de geldigheid, hetzij de ongerijmdheid kan worden afgeleid, terwijl men nòch een de eigenschap bezittend natuurlijk getal bepalen, nòch de ongerijmdheid der eigenschap voor alle natuurlijke getallen bewijzen kan. Onder het kritische getal $\varkappa_v$ eener vluchtende eigenschap v verstaan we het (hypothetische) kleinste natuurlijke getal, dat de vluchtende eigenschap bezit, onder een bovengetal, resp. ondergetal van v een natuurlijk getal, dat niet kleiner, resp. kleiner is, dan het kritische getal. Het spreekt van zelf dat, zoodra er een natuurlijk getal als bovengetal van v gevonden is, het karakter van v als vluchtende eigenschap verloren gaat. De vluchtende eigenschap v wordt tweezijdig genoemd, als men nòch voor alle even, nòch voor alle oneven getallen haar ongerijmdheid kan bewijzen. Onder het duale slingergetal s_v der tweezijdige vluchtende eigenschap v verstaan we de limiet der fundamentaalreeks $a_1, a_2, \ldots$, waarin $a_\nu = (-2)^{-\nu}$, als ν een ondergetal, en $a_\nu = (-2)^{-\varkappa_v}$, als ν een bovengetal van v is. Deze limiet s_v blijkt nòch positief, nòch negatief, nòch gelijk nul, nòch van nul verschillend, nòch rationaal, nòch irrationaal te zijn, en is niettemin een reëel getal; levert derhalve een duidelijke illustratie der ongeldigheid van het principium tertii exclusi. Vervolgens definieeren we nog het duale naderingsgetal n_v van v als limiet der fundamentaalreeks $b_1, b_2, \ldots$, waarin $b_\nu = 2^{-\nu}$, als ν een ondergetal, en $b_\nu = 2^{-\varkappa_v}$, als ν een bovengetal van v is, en zijn thans in staat, de onhoudbaarheid in het licht te stellen van de vier volgende even elementaire als klassieke eigenschappen:

1. Van twee rechte lijnen van het projectieve vlak kan althans één gemeenschappelijk punt worden bepaald.

2. Is een continue functie voor $x = a$ negatief en voor $x = b > a$ positief, dan kan een tusschen a en b gelegen waarde van x worden aangegeven, waarvoor de functie gelijk is aan nul.

3. Is een continue en continu differentieerbare functie gelijk aan

und er noch nicht die äusserste Strenge hat, so erscheint mir der Beweis doch mit Rücksicht auf die damit verbundene Induktion nahezu als streng zu gelten."

Bald danach hat Euler einen vollständigen strengen Beweis gebracht in der in demselben Band der Opera enthaltenen Abhandlung: *demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae 4n + 1 esse summam duorum quadratorum.*

Indem wir hier auf diese zweite Abhandlung hinweisen, wollen wir uns nur noch zu der in der ersten Abhandlung gegebenen Umkehrung wenden, deren Beweis für die Schule wohl auch noch in Betracht kommen kann, zumal unsere Identität hierbei benutzt wird.

Satz 6. *Jede Zahl der Form 4n + 1, die auf eine und nur eine Weise als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, ist eine Primzahl.*

Beweis: Wenn $4n + 1$ keine Primzahl ist, aber als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann, so ist nach Satz 4 die Zerlegung möglich:

$$4n + 1 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$$

also auf Grund der Identität

$$\text{entweder } 4n + 1 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$
$$\text{oder } 4n + 1 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Diese beiden Zerlegungen sind aber verschieden, wenn nicht I. $ac + bd = ad + bc$ oder II. $ac + bd = ac - bd$. Aus I würde aber folgen: $ac + bd - ad - bc = (a - b) \cdot (c - d) = 0$. Also entweder wenigstens $a = b$, oder wenigstens $c = d$ und folglich entweder $a^2 + b^2$ oder $c^2 + d^2$ eine gerade Zahl, was aber unmöglich ist, da $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = 4n + 1$, also ungerade.

Aus II würde folgen: $b = 0$ oder $d = 0$, also $4n + 1 = (a \cdot c)^2 + (a \cdot d)^2$ oder $= (c \cdot a)^2 + (c \cdot b)^2$. Nach Voraussetzung soll aber $4n + 1$ als Summe zweier teilerfremden Quadrate darstellbar sein, während hier die Quadrate gemeinsame Teiler haben. Wenn also eine Nichtprimzahl der Form $4n + 1$ als Summe zweier teilerfremden Quadrate darstellbar ist, dann ist das wenigstens auf zwei Arten möglich. Falls nur eine solche Darstellung möglich ist, kann die Zahl $4n + 1$ nicht zusammengesetzt sein, sondern $4n + 1$ ist dann eine Primzahl.

Damit gewinnt Euler ein Kennzeichen, um Zahlen der Form

een rechte lijn door den oorsprong aan te wijzen, die voor s_0 en s dezelfde ligging bezit.

De intuïtionistisch juist blijvende gedeelten der genoemde theorema's luiden als volgt:

1. Zijn l_1 en l_2 twee lijnen van het metrische projectieve vlak, dan is voor elke positieve ε een zoodanig punt p_1 van l_1 en een zoodanig punt p_2 van l_2 aan te geven, dat de afstand van p_1 en p_2 kleiner is dan ε.

2. Is een continue functie voor $x = a$ negatief en voor $x = b > a$ positief, dan is voor elke positieve ε een tusschen a en b gelegen waarde van x aan te geven, waarvoor de functie een absolute waarde $< \varepsilon$ bezit.

3. Is een continue en continu differentieerbare functie gelijk aan nul voor $x = a$ en voor $x = b > a$, dan is voor elke positieve ε een tusschen a en b gelegen waarde van x aan te geven, waarvoor het differentiaalquotient der functie een absolute waarde $< \varepsilon$ bezit.

4. Bij twee standen van een om een vast punt bewegelijk vast lichaam der Euclidische ruimte is voor elke positieve ε een rechte lijn van het vaste lichaam door het vaste punt aan te geven, waarvan de liggingen voor de beide standen een hoek $< \varepsilon$ met elkaar maken.

Analoge voorbeelden kunnen op bijna alle gebieden der wiskunde in overvloed worden geconstrueerd. Dat niettemin aan de klassieke wiskunde hiermede niet zonder meer het zwijgen wordt opgelegd, ligt aan de haar steunende omstandigheid, dat het principium tertii exclusi weliswaar onjuist, doch, zoolang men het tot eindige groepen van eigenschappen beperkt, tevens niet-contradictoor is, zoodat het intuïtionisme zich bij zijn bestrijding van de dwalingen der klassieke wiskunde het meest gangbare repressiemiddel van denkdwalingen, de reductio ad adsurdum, ziet onthouden, en uitsluitend op vermaning tot redelijke bezinning is aangewezen.

DIE FUNKSIEBEGRIP EN DIE GRAFIESE VOORSTELLING

DOOR

Prof. D. J. VAN ROOY.

Ek het met belangstelling kennisgeneem van die artikel van die heer H. J. E. Beth oor „de denkmoeilijkheden, gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen" in Nr. 1 van die lopende jaargang van Euclides. Wat my veral getref het is:

(1) die manier waarop hy in sy ontleding van die moeilikhede die funksie en die grafiese voorstelling as 'n eenheid laat saamgroei en ontwikkel;

(2) sy opvatting oor die beskouing dat die vergelijking dié onderwerp van die klassieke skoolalgebra is;

(3) sy beskouinge oor die (eventuele) invoering van die infinitesimaalrekening op die middelbare skool.

Ek kan my grotendeels verenig met die gedagtes wat deur die heer Beth uitgespreek word. Graag wil ek een en ander ter aanvulling gee, met die vooropstelling dat ek in die eerste plek die oog het op suid-afrikaanse toestande. Tog meen ek dat hierdie onderwerp vandag so algemeen bespreek word dat ek nie gevaar loop om deur hierdie selfopgelegde beperking te veel afbreuk aan die belangstelling van die Nederlandse leser van Euclides te doen nie.

Funksie en grafiek vorm vandaag die brandpunt van die algebraonderwys op die middelbare skool, en tereg ook. Dit het 'n swaartepuntsverskuiving veroorsaak wat nuwe vérgesigte geopen het. Geen wonder dat die invoering van die infinitesimaalrekening tot die moontlikhede gaan behoort het nie; ons kon dit verwag: dis die logiese konsekwensie van die nuwe gesigspunt. Tog is dit nodig dat ons ons nie gaan vergaloppeer nie. Tensy hierdie saak met die nodige versigtigheid en omsigtigheid aangepak word bestaan daar gevaar van verloop tot nuwe formalisme en verstarring. Dit tog

wil ons teen alle prys vermy; immers, die nuwe opvatting van die vak moet dit juis uit sy statiese diskreetheid van waterdigte kompartementjies opvoer in 'n dinamiese wordingsproses van funksionele verband en veranderlikheid. Daarom moet ons sorg dra om dwarsdeur die leergang die regte koers te hou.

'n Verkeerde opvatting wat nog dikwels aangetref word is dat grafiese voorstellinge as afsonderlike onderwerp behandel moet word. Dit kom dan vroeër of later aan die beurt, word behandel en... afgehandel. Liewer nooit van 'n grafiese voorstelling gerep as so'n mishandeling daarvan. Die grafiek moet ter sprake kom sodra van 'n formule gewaag word, d.i. in die eerste algebrales. Soos die kennis van die hoofbewerkinge toeneem sal die formule meeropvattend word en ook die grafiek belangriker dienste gaan bewys. Die heer Beth gee 'n mooi verduideliking van die geleidelike opbou van die grafiese voorstelling en ek hoef daar niks by te voeg nie. Ek wil egter 'n ander punt aanroer, nl. die gewigtige rol van formule en grafiek by die ontwikkeling van die begrippe, veral van die getalbegrip.

Wanneer die leerling met die studie van algebra moet begin ken hy nog alleen die ongerigte getal. Hy leer nou om letters as getallesimbole te beskou. Die letters vervang (vir hom) ongerigte getalle. $a—b$ het vir hom alleen betekenis wanneer b kleiner is as a. Hier kom die leerling voor die eerste uitbreiding van sy getalbegrip te staan. Dis egter nodig dat hy duidelik die behoefte aan sodanige uitbreiding sal besef en die besef kan by hom op baie geskikte manier deur manier deur middel van grafiese voorstellinge aangebring word. Sy grafiek is nog beperk tot een kwadrant. Hij tabuleer verskillende eenvoudige funksies, soos $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ ens.. Die tweede voorbeeld is veral leersaam. Waardes van a, b en c word so gekies dat in sommige gevalle die „hele" parabool verskijn, in andere weer 'n gedeelte (of die hele) ontbreek. As hij al bekend is met die sinus, cosinus en tangens funksies (0° — 90°), teken hy ook hulle grafiese voorstellinge. Tussen hakies kan hier bygevoeg word dat 'n vroeë invoering van die genoemde goniometriese funksies van besondere waarde is as die funksiebegrip tot sy reg moet kom.

Hierdie „onaffe" grafieke dien as 'n magtige prikkel om by die leerling die noodwendigheid van uitbreiding tuis te bring. Dit word nog versterk as hy merk dat die vergelijking $ax + b = 0$ soms 'n

wortel het en dan weer geen wortel het nie; dat die vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ twee wortels, een wortel of geen wortel het nie. Nou word dan eers die nuwe X-as ingevoer en aan die hand daarvan optelling, aftrekking ens. van gerigte getalle bestudeer. Sodra die nodige substitusies uitgevoer kan word, word die vroeër opgestelde tabelle uitgebrei en die „halwe" grafieke voltooi. Of ook, die leerling probeer eers sy grafiese voorstellinge voltooi en gaan dan na hoe hulle ooreenkom met die nuwe waardes wat hy uit die formules kan verkry. In die gevalle van die goniometriese funksies lei hierdie prosedure op natuurlike wyse tot uitbreiding van die begrip „hoek" en kan die eenvoudige identiteite soos $\sin (180—\alpha) = \sin \alpha$ uit die grafieke afgelees word. Op ongesogte manier het ons leerling 'n belangrike voorwaartse stap geneem en 'n nuwe vergesig verkry. Wil hy nou nagaan wat van sy vergelykinge geword het dan vind hy dat (i) die vergelyking $ax + b = 0$ in alle gevalle 'n wortel het, (ii) die vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ twee wortels (verskillend of saamvallend) of geen wortels het nie. Die naspeuring van die nuwe moontlikhede is vir hom 'n interessante taak.

Dit is nie nodig om breuke as 'n uitbreiding van die getalbegrip te behandel nie daar hierdie stap al in die rekenkunde gedoen is. Tog verskyn hulle in 'n nuwe rol as gebroke eksponente. By die invoering van die gebroke en negatieve eksponente kan ons ons weer verlaat op 'n grafiese behandeling. Keer voorlopig eers weer terug tot die gebied van die ongerigte getal. Neem 'n voorbeeld soos $y = 1{,}2^n$ en teken sy grafiek. Dit bestaan natuurlik uit 'n reeks geïsoleerde punte. Hierdie punte word dan voorlopig beskou as die raamwerk van 'n kontinue kromme vir die funksie $y = 1{,}2^n$ waarvan die bestaansreg opgespoor moet word. Interpolasie gee tentatiewe waardes vir gebroke magte terwyl ekstrapolasie dieselfde werk verrig vir negatiewe magte. Uitbreiding van die rekenkundige eksponentereeks en die meetkundige magtereeks bevestig die waardes wat die „grafiek" opgelewer het.

Hierdie paar voorbeelde moet dien om aan te toon hoe ons van die visuele beeld gebruik kan maak om aanwesige begrippe uit te brei of om nuwe begrippe in te lei. Terselfdertyd het ons hierin 'n middel om die kontinuïteitsintuïsie by die leerling te versterk. Dit bereik ons eerder langs meetkundige as langs rekenkundige weg. Solang alleen die weg van substitusie en tabulering gevolg word, oorweeg die diskreetheid van die getal en ontbreek alle begrip van

veranderlikheid. Word die funksiebegrip stelselmatig aan die hand van formule en grafiese voorstelling ontwikkel dan kry die leerling al gou 'n besef van groei en verandering en behoort daar geen moeilikheid te wees om die begrippe differensiaalkoëffisiënt en bepaalde integraal in te voer nie. Eersgenoemde verskyn as 'n gradiënt en laasgenoemde as 'n oppervlakte. As terselfdertyd in die meganika die afstand-tyd en snelheid-tyd krommes bestudeer word kan daarvan ook 'n dankbare gebruik gemaak word om die begrippe deeglik te ontwikkel.

M.i. verdien dit oorweging om aanvanklik die hele onderwerp (onder bespreking) met die naam „funksieleer" aan te dui en om geen skerp lyne te trek tussen algebra, goniometrie en infinitesimaalrekening nie. Hierdie onderskeiding kan later gemaak word. Voorlopig behoort die funksiebegrip die keuse van stof en metode te beheers. So'n beskouing sou ons in staat stel om die tradisionele leergange aansienlik te besnoei in sekere opsigte en aan te vul met stof was nou angsvallig uit die middelbare kursus geweer word. 'n Nuwe perspektief is nodig.

Potchefstroom, 25 Januarie, 1933.

DIDAKTISCHE UND HISTORISCHE BEMERKUNGEN ÜBER EINE VON GAUSZ ZUM NUMERISCHEN RECHNEN BENUTZTE IDENTITÄT

VON

WILHELM LOREY in Leipzig.

In seiner *Methodik des mathematischen Unterrichts,* [1]) ebenso wie schon früher in seiner Abhandlung *die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauß* [2]) erwähnt Herr Philipp Maennchen eine von Gauß zum numerischen Rechnen benutzte Identität:

$$(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Diese Identität, deren Richtigkeit nachzuweisen schon eine gute Uebung für den mathematischen Unterricht der mittleren Klassen ist, die numerisch zu prüfen und anzuwenden von Herrn Maennchen mit Recht auch schon für den Rechenunterricht der unteren Klassen vorgeschlagen wird, ist Gauß vermutlich aus dem in seinem 18. Lebensjahr eifrig begonnenem Studium Eulerscher Schriften bekannt geworden. Sie findet sich in der Tat in einer in der Petersburger Akademie veröffentlichten Abhandlung „De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum" die jetzt durch die im Erscheinen begriffene grosse Eulerausgabe bequem zugänglich ist. Die Abhandlung steht im ersten Band der auf 4 Bände berechneten zahlen-theoretischen Arbeiten Eulers [3]). Die bis jetzt vorliegenden, von dem inzwischen leider verstorbenen F. Rudio herausgegebenen 2 Bände enthalten eine Fülle von Anregungen, die mir für den mathematischen Schulunterricht geeignet erscheinen. Herr Speiser hat in seiner schönen Sammlung *„Klassische Stücke der Mathematik"* [4]) aus dem 2. Band die Sätze über Potenzreste, als „der grundlegenden Leistung des 18. Jahrhunderts" in deutscher Sprache gebracht, worauf ich hier besonders hinweisen möchte, weil das

Speisersche Buch vielleicht noch nicht genügend bekannt geworden ist, es anderseits aber gerade durch den Abdruck dieser Eulerschen Arbeit für das Privatstudium mathematisch interessierter Schüler der oberen Klassen sehr geeignet ist.

Aehnliches gilt von der oben genannten Eulerschen Arbeit, in der die uns hier interessierende Identität abgeleitet wird. Euler zeigt zunächst:

I. Wenn $p = a^2 + b^2$, dann ist auch $4p$, $9p$, $16p \ldots$ eine Summe zweier Quadratzahlen. Beweis einfach: $4p = (2a)^2 + (2b)^2$.

II. Wenn $p = a^2 + b^2$, dann ist auch $2p$ und allgemein $2n^2p$ Summe zweier Quadratzahlen; denn $2p = 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$ und $2n^2p = n^2(a+b)^2 + n^2(a-b)^2$.

III. Wenn $2p = a^2 + b^2$, dann folgt

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2; \text{ denn } a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Dann fährt er fort:

„Deinde notatu dignum est sequens theorema, quo natura numerorum, qui sunt summae duorum quadratorum, non mediocriter illustratur."

Wenn $p = a^2 + b^2$ und $q = c^2 + d^2$, dann ist, wie Euler durch Ausmultiplikation zeigt, $pq = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ oder $pq = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$; also z.B. $5 . 13 = (1^2 + 2^2) . (3^2 + 2^2) = (1.3 + 2.2)^2 + (2.3 - 1.2)^2 = 49 + 16 = (2.2 - 1.3)^2 + (2.3 + 1.2)^2 = 1 + 64$.

Dieses Zahlenbeispiel findet sich schon bei D i o p h a n t, worauf ich weiter unten noch zu sprechen komme.

Besteht das Produkt aus mehreren Faktoren, deren jeder eine Summe von zwei Quadratzahlen ist, so kann es auf mehrfache Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, was Euler an dem Beispiel $1105 = 5.13.17$ zeigt, für das er ohne nähere Ausführungen die vier Zerlegungen angibt:

$1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = 31^2 + 12^2 = 24^2 + 23^2$. Wir haben hier ein ausgezeichnetes Uebungsmaterial für den Unterricht, das verschiedene lehrreiche Ueberlegungen veranlassen kann. Die vier Zerlegungen in die Summe zweier Quadrate lassen sich z.B. dadurch gewinnen, dass man zwei Faktoren vereinigt und damit ein Produkt erhält, dessen Faktoren schnell als zerlegbar erkannt

werden. Zugleich kommt hier eine kombinatorische Ueberlegung in Betracht, insofern man aus den drei Faktoren 5 . 13 . 17 auf drei Arten ein Produkt von zwei Faktoren erhält, nämlich: $1105 = 65 . 17 = 85 . 13 = 5 . 221$. Für das weitere empfiehlt sich im Unterricht vielleicht folgender Gang, wobei unsere Identität benutzt wird:

Es ist $65 . 17 = (8^2 + 1^2) . (4^2 + 1^2) = (8 . 4 + 1 . 1)^2 + (8 . 1 - 1 . 4)^2 = 33^2 + 4^2$
oder $= (8 . 4 - 1 . 1)^2 + (8 . 1 + 4 . 1)^2 = 31^2 + 12^2$;
$85 . 13 = (9^2 + 2^2) . (3^2 + 2^2) = (27 \pm 4)^2 + (18 \mp 6)^2 = 31^2 + 12 = 23^2 + 24^2$;
$5 . 221 = (2^2 + 1^2) . (14^2 + 5^2) = (28 \pm 5)^2 + (10 \mp 14)^2 = 33^2 + 4^2 = 23^2 + 24^2$.

Von diesen so erhaltenen sechs Zerlegungen sind aber nur drei verschieden. Findige Schüler werden nun wohl auf den Gedanken kommen, dass man die Faktoren 65, 85, 221 auch noch auf andere Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegen kann, nämlich: $65 = 7^2 + 4^2$, $85 = 9^2 + 2^2$, $221 = 14^2 + 5^2$. Damit erhält man dann auch die vierte von Euler angegebene Zerlegung: $1105 = 32^2 + 9^2$.

Jetz wird sich die Frage erheben, ob mit diesen vier Zerlegungen der Zahl 1105 alle Möglichkeiten erschöpft sind. Der für die Schule geeignete Weg zur Beantwortung der Frage scheint mir die Herstellung einer Tabelle für die Funktion $y = 1105\text{-}x^2$ zu sein. Hierbei gibt es wieder etwas zu entdecken, was die rechnerische Arbeit wesentlich erleichtert. Man lässt zunächst etwa für $x = 1, 2, 3$ den Wert von y berechnen und tabellarisch so eintragen:

x	y	
1	1104	3
2	1101	5
3	1096	

Auch hier kommen findige Schüler mit ganz geringer Hilfe auf den Gedanken, dass die rechnerische Arbeit wesentlich erleichtert werden kann, wenn man die Differenzen zwischen den Funktionswerten benutzt; damit wird die Arbeit auf eine einfache Subtraktion zurückgeführt, und in wenigen Minuten ist die Tabelle hergestellt, die natürlich nur bis $x = 33$ fortzusetzen ist.

Unter den 33 Werten erkennt man dann sofort 8 Quadratzahlen,

PROSPECTUS

LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

Dr. J. G. RUTGERS
HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT

EERSTE DEEL
DE RECHTHOEKIGE PROJECTIE

EERSTE STUK
TOT EN MET DOOR PLATTE VLAKKEN BEGRENSDE LICHAMEN (177 FIGUREN IN DEN TEKST EN 158 OPGAVEN)



P. NOORDHOFF N.V. — 1933 — GRONINGEN, BATAVIA

108 Blz. 142 fig. **PRIJS f 1.75**

VOORWOORD.

Wegens de veranderingen in het examen-programma voor de middelbaar-onderwijs-akte voor Hand- en Rechtlijnig teekenen (akte Ma) — zie Kon. Besluit van 29 November 1932, *Stbl.* no. 566 — leek het mij voor de studeerenden voor die akte gewenscht, dat zij de beschikking hebben over een leerboek der beschrijvende meetkunde, dat niet alleen de rechthoekige projectie, maar ook de scheeve parallelprojectie en de perspectief behandelt, en waarin volkomen rekening wordt gehouden met de nieuwe eischen voor het examen. Deze zijn voor alle drie projectie-methoden: de kennis hiervan tot en met de behandeling van de regelmatig gebogen vlakken en omwentelingslichamen, en de leer van licht en schaduw (zon- en kunstlicht).

Het leerboek zal in twee deelen verschijnen. In het eerste deel zal de rechthoekige projectie worden behandeld, in het tweede deel de scheeve parallelprojectie en de perspectief.

Ongetwijfeld zal dit leerboek, 't zij in zijn geheel, 't zij ten deele, ook bij de studie voor verschillende nijverheidsakten (nl. NIII, NIII aanteekening, NIV, NV, NIX*a*, NIX*b*, NX en NXI) kunnen worden gebruikt.

Mijn jarenlange werkzaamheid als examinator voor deze akten heeft mij tot het schrijven van dit leerboek gebracht.

Thans verschijnt reeds het „Eerste stuk" van het eerste deel, waarin de rechthoekige projectie van begin af aan wordt opgezet en de behandelde stof zich uitstrekt tot en met de door platte vlakken begrensde lichamen.

Daar de inhoud van dit eerste stuk van het eerste deel de leerstof bestrijkt, die aan verschillende inrichtingen van onderwijs, als de H. B. S. met 5-jarigen cursus, wordt onderwezen, bestaat misschien hiervoor ook in die kringen belangstelling. Dit was mede een der redenen, waarom dit eerste stuk, dat als

een afzonderlijk geheel kan worden beschouwd, reeds nu uitkomt.

De heer Noordhoff was bereid de uitgave van dit leerboek op zich te nemen, waarvoor ik hem hierbij mijn dank betuig, alsook voor de goede verzorging daarvan.

Den heer Boom, assistent aan de T. H., dank ik voor de uitvoering der teekeningen.

Den Haag, Maart 1933 J. G. RUTGERS.

INHOUD

nämlich: $1089 = 33^2$, $1024 = 32^2$, $961 = 31^2$, $576 = 24^2$, $529 = 23^2$, $144 = 12^2$, $81 = 9^2$, $16 = 4^2$. Wegen der Vertauschbarkeit der Summanden hat man damit in der Tat die vier verschiedenen Zerlegungen in die Summe zweier Quadrate.

So hat man experimentell bestätigt, was übrigens aus einem zahlentheoretischen Satz folgt, den man vollständig in der Schule wohl nicht beweisen kann: [5]) *Ist eine ganze Zahl genau ein Produkt von r Primzahlen der Form $4n + 1$, so kann sie auf genau 2^{r-1} verschiedene Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden, wenn man von der Reihenfolge der Quadrate absieht und nur positive Grundzahlen zulässt.*

Nach diesem Satz ist also $1105 = 5 \,.\, 13 \,.\, 17$ (also $r = 3$) auf 2^2 verschiedene Weisen in die Summe zweier Quadrate zerlegbar. Für $r = 1$ ist dieser Satz schon A. Girard, dem Herausgeber der mathematischen Werke von Simon Stevin, [6]) bekannt. Fermat hatte behauptet einen Beweis zu besitzen. Den ersten strengen Beweis dafür, dass eine Primzahl der Form $4n + 1$ nur auf eine Weise in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt werden kann, hat Euler in der oben genannten Abhandlung gegeben, wobei ebenfalls unsere Identität benutzt wird; wir werden weiter unten darauf noch näher eingehen.

Wenn wir den Satz für $r = 1$ vorläufig als richtig annehmen, dann lässt sich der oben erwähnte zahlentheoretische Satz durch vollständige Induktion m.E. auch im mathematischen Unterricht der oberen Klassen beweisen und damit für diesen wichtigen Schluss, der in der Schule vielfach nur beim Beweis des Binomischen Satzes benutzt wird, ein neues brauchbares Beispiel geben, das zu den von mir bei einer anderen Gelegenheit veröffentlichten Beispielen hineinkommen kann. [7])

Wir wollen also annehmen, dass der Satz bis zu einem beliebigen ganzzahligen r richtig ist, d.h. es sei:
$m = p_1 \,.\, p_2 \ldots p_r = X_i^2 + Y_i^2$, wo jedes p_ν eine Primzahl der Form $4n + 1$ ist; die Marke i durchläuft die Werte $1, 2 \ldots 2^{r-1}$ und die Wertepaare $X_i\, Y_i$ sind alle verschieden. Mit einer neuen von den r bisher benutzten Primzahlen verschiedenen Primzahl $p_{r+1} = x^2_{r+1} + y^2_{r+1}$ bilden wir

$$m \,.\, p_{r+1} = (X_i^2 + Y_i^2)\,(x^2_{r+1} + y^2_{r+1}).$$

Wenden wir auf die rechte Seite unsere Idendität an, so folgt

$$m \,.\, p_{r+1} = (X_i x_{r+1} \pm Y_i y_{r+1})^2 + (X_i y_{r+1} \mp Y_i x_{r+1})^2.$$

Jedes der 2 Paare $X_i Y_i$ liefert also zwei Zerlegungen von mp_{r+1}. Die Zahl $p_1 . p_2 \ldots p_{r+1}$ ist demnach in genau 2^r Arten als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, die untereinander verschieden sind. Wäre nämlich für zwei verschiedene Marken $k \neq l$ $(X_k^2 + Y_k^2) p_{r+1} = (X_l^2 + Y_l^2) p_{r+1}$, so wäre $X_k^2 + Y_k^2 = X_l^2 + Y_l^2$, was gegen die Voraussetzung wäre, dass bis zu dem angenommenen r unser Satz richtig ist, d.h. genau 2^{r-1} verschiedene Zerlegungen der Zahl m in die Summe zweier Quadrate gestattet.

Da nun unser Satz für $r = 1$, wie weiter unter bewiesen wird, richtig ist, gilt er auch für $r = 2, 3$ usw.

Lässt sich auf der Mittelstufe die Richtigkeit der Identität durch gewöhnliches Ausmultiplizieren nachweisen, so empfiehlt sich für die Oberstufe vielleicht das elegante Verfahren, das Lagrange in seinen „Erläuterungen zu Eulers Algebra", [8]) die auch für mathematisch interessierte ältere Schüler zum Privatstudium sehr zu empfehlen sind, allgemein angewandt hat zur Berechnung eines Produktes $(x + \alpha y) . (x + \beta y)$, wo α und β die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit gegebenen Koeffizienten sind.

Spezialisiert auf unseren Fall erhalten wir mit $i = \sqrt{-1}$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di).$$

Verbindet man in dem Produkt rechts den ersten mit dem vierten Faktor, den zweiten mit dem dritten, so folgt:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd - i[ad - bc])(ac + bd + i[ad - bc]),$$

also mit $ac + bd = u$, $i\,(ad - bc) = v$, nach der schon auf der Unterstufe zum numerischen Rechnen benutzbaren Identität $(u - v)(u + v) = u^2 - v^2$, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Vereinigt man den ersten und dritten Faktor, sowie den zweiten und vierten, so folgt entsprechend:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Bei der Uebung an Zahlenbeispielen empfehle ich auch Faktoren der Form $4n + 3$ zu wählen, bei denen eine Zerlegung in die Summe zweier Quadratzahlen nicht gelingt, was hier als eine induktive Entdeckung bei den Schülern gewiss Interesse erregt. Spielt doch überhaupt die Induktion in diesem Gebiet eine grosse Rolle, was Euler wiederholt ausgesprochen hat, z.B. in der Abhandlung *Specimem de usu observationum in mathesi pura.* [9])

Bei Euler folgen nun einige Bemerkungen, die mir für den Unter-

richt ganz besonderer Beachtung wert erscheinen, wegen ihrer Mahnung zum vorsichtigen Schliessen. Es handelt sich um die Umkehrung der Identität:

Wenn das Produkt pq die Summe zweier Quadratzahlen ist, so kann durch „keine Regel der Logik, noch aus der Sache selbst geschlossen werden, dass auch die Faktoren diese Eigenschaft haben". Das zeigt schon das Beispiel: $45 = 36 + 9$, wobei von den Faktoren 3 und 15 keiner in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden kann.

Wenn aber ausser dem Produkt auch der eine Faktor eine Summe zweier Quadrate ist, so ist es durchaus *nicht* selbstverständlich, dass auch der andere Faktor diese Eigenschaft hat. Die Fehlerhaftigkeit eines solchen Schlusses zeigt der entsprechende Schluss: falls ein Produkt gerade und ein Faktor gerade ist, ist auch der andere Faktor gerade; wer so schlösse, würde sich heftig täuschen. „Si quis autem hinc concludere velit, is vehementer falleretur."

Es ist also ein sehr sorgfältiger Beweis für die Umkehrung nötig. Euler sagt:

„demonstratio quidem, quam inveni, ita comparata videtur, ut non mediocrem vim ratiocinii requirat."

Es folgt Satz 1:

Wenn das Produkt $p \cdot q$ die Summe zweier Quadratzahlen ist und der eine Faktor p eine Primzahl mit der gleichen Eigenschaft, so ist auch der andere Faktor q als Summe zweier Quadrate darstellbar:

Beweis: Es sei $pq = a^2 + b^2$ und $p = c^2 + d^2$, wo c und d teilerfremd sind, da p als Primzahl vorausgesetzt wird. Wegen $q = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ wird der Zähler a^2+b^2 durch den Nenner $c^2 + d^2$ teilbar, ebenso auch $c^2 \cdot (a^2 + b^2)$ und $a^2 \cdot (c^2 + d^2)$, folglich auch die Differenz der beiden letzten Ausdrücke: $b^2 \cdot c^2 - a^2 \cdot d^2 = (bc + ad) \cdot (bc - ad)$ durch $c^2 + d^2$ teilbar. Da aber nach Voraussetzung $c^2 + d^2$ eine Primzahl ist, muss also einer der Faktoren durch $p = c^2 + d^2$ teilbar sein. Wir können daher setzen: $bc \pm ad = mc^2 + md^2$. Was nun auch a und b für Zahlen sind, so lassen sich immer positive oder negative Zahlen x und y finden, sodass $b = mc + x$ und $a = md + y$ ist. Durch Einsetzen ergibt sich notwendig $cx \pm dy = 0$, oder $\frac{x}{y} = \mp \frac{d}{c}$. Da d und c als

teilerfremd vorausgesetzt sind, wird daher mit dem Proportionalitätsfaktor $n : x = n \cdot d$ und $y = \mp n \cdot c$, also $a = \pm md \mp nc$ und $b = mc + nd$. Setzen wir diese Ausdrücke ein, so ergibt sich schliesslich nach einfachen Umformungen: $p \cdot q = (m^2 + n^2) \cdot (c^2 + d^2)$, also wird $p = m^2 + n^2$, d.h. die Summe zweier Quadrate, was zu beweisen war.

Die Regeln der Logik gestatten nun aber *nicht* folgende Umkehrung: wenn $p \cdot q$ die Summe zweier Quadrate und q selbst so darstellbar ist, dann ist auch p, falls es eine Primzahl ist, als Summe zweier Quadrate darstellbar, oder p ist das Produkt aus Primzahlen, deren jede Summe zweier Quadratzahlen ist.

Es steht nämlich noch nicht fest, ob das Produkt aus irgendwelchen Primzahlen, die nicht selbst Summe von zwei Quadratzahlen sind, unmöglich eine Summe zweier Quadratzahlen sein kann. Ein Gegenbeispiel ist ja der Fall: $45 = 6^2 + 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, wo keiner der Faktoren 3 und 5 als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist.

Man kann richtig nur so umkehren, dass aus der Verneinung der Behauptung auf die Verneinung der Voraussetzung geschlossen wird; man erhält dadurch eine Umkehrung von grösster Bedeutung:

Wenn das Produkt $p \cdot q$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, der Faktor q aber nicht, dann kann auch p, falls es Primzahl ist, nicht als Summe zweier Quadrate dargestellt werden; ist p aber keine Primzahl, dann enthält es wenigstens einen Primzahlfaktor, der nicht als Summe zweier Quadrate darstellbar ist.

Der Beweis wird indirekt geführt. Wäre q eine Primzahl der Gestalt $p = c^2 + d^2$, dann müsste nach dem vorhergehenden Satz auch q so zerlegbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. Ist aber p keine Primzahl, und wären alle seine Faktoren als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, so müsste nach der Folgerung, die Euler aus dem vorhergehenden Satz leicht abgeleitet hat, und die ich hier übergangen habe, auch q die Summe zweier Quadratzahlen sein; also muss p wenigstens einen Faktor enthalten, der nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist.

Bei den folgenden Ueberlegungen Eulers tritt ein characteristisches Verfahren auf, das sich ähnlich auch schon bei Fermat findet: die Zurückführung auf kleinste Zahlen. Es gilt Satz 3:

Wenn die Summe der Quadrate zweier teilerfremden Zahlen

a und b durch eine Zahl p teilbar ist, dann kann man zwei Zahlen c und d finden, für die ebenfalls $c^2 + d^2$ durch p teilbar ist, aber $c^2 + d^2 \leqq \frac{1}{2} p^2$.

Beweis: wegen der angenommenen Teilerfremdheit der Zahlen a und b kann man setzen: $a = m p + c$, $b = n p + d$, wobei die Reste c und d absolut genommen nicht grösser als $\frac{1}{2} p$ sind. Damit wird $a^2 + b^2 = m^2p^2 + 2\ mpc + c^2 + n^2p^2 + 2\ npd + d^2$. Da die linke Seite nach Voraussetzung durch p teilbar ist, muss also auch $c^2 + d^2$ durch p teilbar sein, und weil $c^2 \leqq \frac{1}{4} p^2$ und $d^2 \leqq \frac{1}{4} p^2$, so folgt: $c^2 + d^2 \leqq \frac{1}{2} p^2$. Q. E. D.

Daraus ergibt sich z.B. die Unlösbarkeit in ganzen Zahlen der Gleichung $x^2 + y^2 = 3z$. Wäre diese nämlich lösbar, so müsste man zwei Zahlen c und d finden, für die $c^2 + d^2 \leqq 4{,}5$ ist, was unmöglich ist.

Damit kann nun bewiesen werden Satz 4:

Die Summe der Quadrate zweier teilerfremden Zahlen kann nur Teiler haben, die selbst Summe zweier Quadrate sind.

Der Beweis wird indirekt geführt. Es sei $a^2 + b^2$ durch p teilbar, wo p selbst nicht Summe zweier Quadratzahlen ist. Nach dem vorhergehenden Satz könnten wir dann zwei Zahlen c und d finden, für die $c^2 + d^2 = p \cdot q \leqq \frac{1}{2} p^2$.

Da p nicht als Summe zweier Quadrate darstellbar sein soll, kann nach Satz 2 auch q nicht so darstellbar sein, oder muss wenigstens einen nicht so darstellbaren Faktor r enthalten. Wegen $p \cdot q \leqq \frac{1}{2} p^2$, gilt $q \leqq \frac{1}{2} \cdot p$ also erst recht $r \leqq \frac{1}{2} \cdot p$. Nach Satz 3 kann man, da r ein Teiler von $c^2 + d^2$ ist, zwei Zahlen e und f finden, für die $e^2 + f^2$ teilbar durch r, aber $\leqq \frac{1}{2} r^2$ ist; also wird $e^2 + f^2 \leqq \frac{1}{8} p^2$.

So liessen sich immer kleinere Zahlen finden. Da es aber in den kleinsten Zahlen keine gibt, deren Summe durch eine nicht in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegbaren Zahl teilbar ist, so muss die Annahme $a^2 + b^2$ sei durch p teilbar, wo p nicht in der Form $x^2 + y^2$ darstellbar ist, falsch sein und Satz 4 somit richtig.

Nach diesen Vorbereitungen geht Euler an den Versuch Satz 5 zu beweisen:

Jede Primzahl der Form $4n + 1$ ist eine Summe von zwei Quadratzahlen.

Er sagt aber ausdrücklich von seinem Beweis:

„Wenn ich auch viel vergeblich an dem Beweis gearbeitet habe

und er noch nicht die äusserste Strenge hat, so erscheint mir der Beweis doch mit Rücksicht auf die damit verbundene Induktion nahezu als streng zu gelten."

Bald danach hat Euler einen vollständigen strengen Beweis gebracht in der in demselben Band der Opera enthaltenen Abhandlung: *demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n + 1$ esse summam duorum quadratorum.*

Indem wir hier auf diese zweite Abhandlung hinweisen, wollen wir uns nur noch zu der in der ersten Abhandlung gegebenen Umkehrung wenden, deren Beweis für die Schule wohl auch noch in Betracht kommen kann, zumal unsere Identität hierbei benutzt wird.

Satz 6. *Jede Zahl der Form $4n + 1$, die auf eine und nur eine Weise als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, ist eine Primzahl.*

Beweis: Wenn $4n + 1$ keine Primzahl ist, aber als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann, so ist nach Satz 4 die Zerlegung möglich:

$$4n + 1 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$$

also auf Grund der Identität

$$\text{entweder } 4n + 1 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$
$$\text{oder } 4n + 1 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Diese beiden Zerlegungen sind aber verschieden, wenn nicht I. $ac + bd = ad + bc$ oder II. $ac + bd = ac - bd$. Aus I würde aber folgen: $ac + bd - ad - bc = (a - b) \cdot (c - d) = 0$. Also entweder wenigstens $a = b$, oder wenigstens $c = d$ und folglich entweder $a^2 + b^2$ oder $c^2 + d^2$ eine gerade Zahl, was aber unmöglich ist, da $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = 4n + 1$, also ungerade.

Aus II würde folgen: $b = 0$ oder $d = 0$, also $4n + 1 = (a \cdot c)^2 + (a \cdot d)^2$ oder $= (c \cdot a)^2 + (c \cdot b)^2$. Nach Voraussetzung soll aber $4n + 1$ als Summe zweier teilerfremden Quadrate darstellbar sein, während hier die Quadrate gemeinsame Teiler haben. Wenn also eine Nichtprimzahl der Form $4n + 1$ als Summe zweier teilerfremden Quadrate darstellbar ist, dann ist das wenigstens auf zwei Arten möglich. Falls nur eine solche Darstellung möglich ist, kann die Zahl $4n + 1$ nicht zusammengesetzt sein, sondern $4n + 1$ ist dann eine Primzahl.

Damit gewinnt Euler ein Kennzeichen, um Zahlen der Form

$4n + 1$ auf ihren Primzahlcharacter zu untersuchen. Er findet so z.B. 82421, 100981 und 262657 als Primzahlen, dagegen $1000009 = 293 \cdot 3413$, $233033 = 467 \cdot 499$, $32129 = 361 \cdot 89$ als zerlegbar.

Das sehr sinnreiche Verfahren wird von Euler an den Beispielen ausführlich erläutert, und er sagt wohl mit Recht, dass die Faktoren auf keine andere Weise so schnell gefunden werden könnten.

Für die Schule möchte ich ein Experimentieren mit kleineren Zahlen vorschlagen, etwa durch Konstruktion einer Tabelle wie oben angegeben, oder aber auch durch eine graphische Methode, indem man die Gleichung $m = x^2 + y^2$ als Mittelpunktsgleichung eines Kreises ansieht und die Gitterpunkte, d.h. die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten aufsucht. Der Radius lässt sich sofort aus einem geeigneten Koordinatenpaar abgreifen; z.B. kann für $m = 65 \quad x = 4 \quad y = 7$ genommen werden.

Umgekehrt kann man aber auch das Verfahren benutzen, um die Genauigkeit des quadratischen Koordinatenpapiers zu erproben.

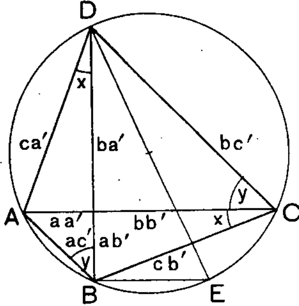
Die Identität $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$ wird gelegentlich in Veröffentlichungen aus neuerer Zeit, die sich mit ihrer Verallgemeinerung beschäftigen, als Eulersche Identität bezeichnet. Das ist aber historisch nicht richtig. Diese Identität hat nämlich schon der berühmte italienische Mathematiker des 13. Jahrhunderts Leonardo Pisano gekannt, was nicht nur eine Vermutung ist, wie S. Günther in seiner Geschichte der Mathematik[10]) sagt, sondern sich wörtlicht belegen lässt. Im *Liber Quadratorum* findet sich der Satz. [11])

„Si quatuor numeri non proportionales proponentur et si primus minor secundo, et terzius minor quarto et aggregatus e quadratis primy et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertiy et quarti, et neuter ex aggregatis quadratus fuerit, egredietur numerus, qui duobus modis equalitur duobus quadratis numeris.'

Leonardo erläutert die zwei Zerlegungen dann an einem Beispiel, das tatsächlich auf die Identität herauskommt.

Die Identität findet sich aber auch schon nach Zeuthen [12]) bei dem 598 n. Chr. geborenen indischen Mathematiker Brahmagupta, und zwar in einer auch für die Schule interessierenden geometrischen Behandlung, die die Identität geometrisch erläutert, und eine Beziehung zum Ptolemaeischen Lehrsatz vom Sehnenviereck herstellt. Brahmagupta geht von zwei rechtwinkligen Drei-

ecken mit den Katheten a und b bzw. a' b' und der Hypotenuse c bzw. c' aus. Durch Multiplikation der Seiten bildet er vier neue rechtwinklige Dreiecke, die er zu einem Viereck zusammensetzt mit aufeinander senkrechten Diagonalen, siehe Figur. Für dieses Viereck ergibt sich leicht



1.) $AC \,.\, ED = AB \,.\, CD \quad BC \,.\, AD,$

2) $$\frac{AC}{BD} = \frac{AB\,.\,AD\,.\,BC\,.\,CD}{AB\,.\,BC\,.\,CD\,.\,DA}.$$

Aus Formel 1 folgt nach der Umkehrung des Ptolemaeischen Satzes, dass ABCD ein Sehnenviereck ist. Besser ist est aber diese Umkehrung nicht zu benutzen, sondern gleich zu beweisen, dass die vier Punkte A B C D auf einem Kreise liegen vom Durchmesser $c\ c'$. Zum Beweis spiegeln wir die Seite AB an der Mittelsenkrechten von AC und erhalten so den Punkt E. Dann ist $DE^2 = DB^2 + BE^2 = (ba' + ab')^2 + (bb' - aa')^2 = (b^2 + a^2)\,.\,(b'^2 + a'^2) = c^2\,.\,c'^2$. Andererseits folgt aus $DC^2 + CE^2 = (bc')^2 + (ac')^2 = c^2\,.\,c'^2$ also $= DE^2$. Das Dreieck DCE ist also bei C rechtwincklig und entsprechend Dreieck DAE bei A, folglich liegen C und A auf dem Kreise über DE als Durchmesser, auf dem daher wegen der Spiegelung auch der Punkt B liegt. Die für den Durchmesser DE gefundene Beziehung $DE^2 = (ba' + ab'^2 + (bb' - aa')^2 = c^2\,.\,c'^2 = (b^2 + a^2)\,.\,(b'^2 + a'^2)$ ist in der Tat unsere Identität.

Oben war von Diophant die Rede. Wie ich einem Referat von Dijksterhuis[13]) entnehme, hat Luigi Cevazzoni in einer 1931 erschienenen grossen Arbeit „Studi su Diofanto" (Rend. sem. mat. Roma, II s 7 S. 109/173) das Auftreten dieser Identität bei Diophant gezeigt.

Mit der Verallgemeinerung der Identität haben sich viele Mathematiker beschäftigt. Insbesondere hat A. Hurwitz[14]) in einer schönen Arbeit die viel erörterte Frage erledigt, wann ein Produkt, dessen Faktoren Summen von n Quadraten sind, als Summe von n Quadraten dargestellt werden kann. Das ist nur für $n = 1, 2, 4,$ und 8 möglich. Eine sehr empfehlenswerte historische Darstellung dieses Problems gibt L. E. Dickson in einer Abhandlung: *On Quaternions and their generaliziation and the history of the*

eight square theorem. [15]) Wenn man die Beschränkung fallen lässt, dass auf der rechten Seite der Identität genau n Quadrate stehen, also nur verlangt, dass auch rechts eine Summe von Quadraten auftritt, so gilt, wie ich kürzlich gefunden habe, folgende Identität:

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu\right)^2 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_l y_k - x_k y_l)^2 \qquad (l \neq k)$$

Wie ich nachträglich aus Dicksons *History of the Theory of Numbers* [16]) gesehen habe, ist diese Verallgemeinerung aber schon 1821 van Cauchy im Cours d'Analyse, Band I pag. 455/457 und 1848 von I. R. Young in Transactions der irischen Akademie 21/II. S. 333 veröffentlicht worden.

Gern benutze ich die Gelegenheit auf die von der Carnegie Institution in Washington herausgegebene inhaltreiche „History of the Theory of Numbers" besonders hinzuweisen, von der mit Recht Erich Bessel-Hagen in seinem Artikel „Zahlentheorie" in Pascals Repertorium sagt: [17])

„Dicksons History enthält vorzügliche Referate über die einzelnen zahlentheoretischen Abhandlungen und Werke, die in wenigen Zeilen den wesentlichen Inhalt mit mustergültiger Klarheit so deutlich herausheben, dass oft ein Vergleich der Originale überflüssig wird."

Wenn das meiste natürlich auch über den Rahmen der Schule hinausgeht, so bieten doch manche zahlentheoretische Fragen, wie ich in der vorstehenden Abhandlung zeigen wollte, einen für die Schule wohl geeigneten Stoff, die Vorsicht und Sicherheit mathematischen Schliessens zu üben und zugleich zu einem numerischen Rechnen anzuregen, das die Zahlen individualisiert und damit die Rechenfähigkeit stärkt.

ANMERKUNGEN:

[1]) In der Sammlung: Handbuch des Unterrichts an höheren Schulen zur Einführung und Weiterbildung, XIII. Band, Frankfurt a/Main, Moritz Diesterweg, 1928, S. 20.

[2]) Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Gesammelt von *F. Klein, B. Brendel* und *L. Schlesinger,* in Kommission bei B. G. Teubner, Leipzig, Heft VI, 1918 S. 41.

[3]) In dem von *Gustav Eneström* bearbeiteten Verzeichnis der Eulerschen Schriften (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung der Ergänzungsbände IV. Band, 1910 und 1913) hat die Arbeit die Nr. 288. Sie steht in Opera omnia, series prima. Vol. secundum (Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1915, S. 295/327.)

[4]) Orell Füssli, Zürich und Leipzig 1925. S. 110/126.

[5]) Vergl. z. B. die sehr zu empfehlende „Einführung in die Zahlentheorie" von *L. E. Dickson,* deutsche Ausgabe von *Ewald Bodewig,* Leipzig und Berlin B. G. Teubner 1931, S. 73, Satz 62. (Dort ist aber in Zeile 2 des Satzes ein Druckfehler zu verbessern: m statt r.)

[6]) Vergl. Dickson a.a.O. S. 74.

[7]) Das Prinzip der vollständigen Induktion. Seine Geschichte und unterrichtliche Verwertung. Vortrag gehalten in der Unterrichtsabteilung derNaturforscherversammlung Nauheim 1920. Zeitschrift für math. Unterricht 1921.

Die vollständige Induktion im mathematischen Unterricht. S. 390—399. Lehrproben und Lehrgänge. Halle. 52 Jahrgang. 1921. S. 205—209.

[8]) Bequem zugängliche Ausgabe der Lagrangeschen Zusätze in *Ostwalds* Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 103, Leipzig, Wilhelm Engelmann 1898. Das angegebene Verfahren findet sich dort S. 153f. Vergl. auch Oeuvres de Lagrange, t. II pag. 377, 655. und Euleri Opera omnia. Ser. I, Vol. I, pag. 638ff.

[9]) Eneström Verzeichnis 256 und Euleri Opera omnia. Ser. I, Vol. II, pag. 459—492.

[10]) Geschichte der Mathematik, I. Teil, von den ältesten Zeiten bis Cartesius, Sammlung Schubert, Leipzig, Göschen'sche Verlagsbuchhandlung, 1908. S. 266.

[11]) *Leonardo Pisano* Scritti Mathematico del secolo decimoterzio. pubblicati de Baldassaro Boncompagni, Roma 1862, Vol. II. S. 257.

[12]) Sur L'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens. Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, V. Band, 1904, S. 108f.

[13]) Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, V. Band 1932. S. 2f.

[14]) Göttinger Nachrichten 1898, S. 309/316. Wegen einer anderen Verallgemeinerung in der Form

$$(x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2)$$

vergl. *O. Toeplitz,* Bemerkungen zu der Arbeit von *Conrad Müller* „Wie fand *Archimedes* die von ihm gegebenen Näherungswerte von $\sqrt{3}$?" Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik Abt. B. Studien Bd. 2 (1932), S. 288. In *Vahlens* Artikel „Arithmetische Theorie der Formen" Encyclopädie der Math. Wissenschaften I, 1, S. 609 steht die verallgemeinerte Identität

$$(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)(a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2) - \{a\alpha\beta + 2(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta\}^2 = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \text{ mit } D = b^2 - ac.$$

Dass hier ein Versehen im Vorzeichen vorliegt, ergibt sich sofort aus $a = c = 1$, $b = 0$, also $D = -1$. Es muss also wohl $D = ac - b^2$ gesetzt werden, was in Übereinstimmung mit der allgemeinen Formentheorie wäre. Vergl. z.B. *Dickson,* Höhere Algebra. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1929. S. 4. In der oben in Anmerkung 5 genannten Zahlentheorie wird in einer Anmerkung S. 57 auf diesen Unterschied in der Bezeichnung der Diskriminanten aufmerksam gemacht.

[15]) Annals of mathematics, second series, vol. 20, 1918/19. S. 155 171.

[16]) Vol. II. S. 318.

[17]) 2. Auflage, 3. Teilband, Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1929, S. 1462.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van de firma P. N o o r d h o f f, Groningen.

Prof. Dr. C. ZWIKKER met medewerking van Dr. A. S. C. VAN HEEL, *Leerboek der Optiek.* Deel IV van Noordhoff's Natuurkundige bibliotheek. 483 blz. 220 fig. *f* 14,75, geb. . . . . *f* 16.—
Voor inteekenaars op Noordhoff's Wiskundige Tijdschriften tijdelijk. Ingen. *f* 12.25, geb. . . . . *f* 13.50

Prof. Dr. J. A. BARRAU, *Analytische Meetkunde.* Deel I. Het Platte vlak. **2e druk**. 446 blz. 95 fig., geb. . . . . *f* 10.20
Voor inteekenaars op Noordhoff's Wiskundige Tijdschriften tijdelijk . . . . *f* 8.20

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO, *Mechanica voor het M.O.* met vraagstukken. 162 blz. 92 fig., geb. . . *f* 2.50

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, *Vlakke Driehoeksmeting voor middelbaar en voorbereidend Hooger onderwijs.* **2e druk** met sinustafel en formules, gec. . *f* 2.25

P. WIJDENES, *Antwoorden Algebra M.U.L.O.* II B. **3e druk** *f* 2.—

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN, *Nieuw Algebraboek,* geb. I, II, III, IV A à *f* 1.—, IV B . . *f* 1.75

P. WIJDENES, *Rentetafel D,* 2e druk . . . . *f* 0.50

Van de firma A D. W e s m a e l - C h a r l i e r, Namur.

Nouvelles Tables à cinq décimales . . . . Belg. fr. 22
(Fransche bewerking van Noordhoff's Schooltafel).

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. H. J. E. Beth en Dr. P. J. van Loo, Mechanica voor het M. O. met vraagstukken. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1933. 162 blz., geb. *f* 2.50.

Video meliora proboque, deteriora sequor. Door deze bekende regels is het nieuwe mechanicaboek volkomen gekenschetst. Overal bemerkt men, dat de schrijvers gaarne een grondige behandeling van de schoolmechanica wilden geven, een duidelijke uiteenzetting van de grondbegrippen, maar dat zij zich herhaaldelijk gedwongen hebben gezien tot concessies aan de practijk, die nu eenmaal behandeling van bepaalde onderwerpen eischt, en dat wel in zeer krap toegemeten tijd. Tevens hebben zij een enkele maal de oude beproefde paden verkozen boven zekere nieuw gebaande wegen.

Het boek is *zeer* beknopt. De schrijvers hebben getracht, zich te onthouden van onjuiste beweringen, en zijn daarin ook over het algemeen geslaagd. Maar de onjuiste traditioneele voorstellingen hadden het voordeel van een zekeren schijn van intuitieve duidelijkheid, die de juiste behandeling mist. Vandaar dat deze laatste veel meer uitlegging vereischt, terwijl de schrijvers juist zeer spaarzaam zijn met hun toelichting. Dit zal het boek niet gemakkelijk maken voor de leerlingen; voor zelfstudie schijnt het mij allerminst geschikt. Maar daarvoor is het ook niet geschreven, en ik vertrouw, dat de toelichting van den docent de moeilijkheden der leerlingen zeer sterk zal kunnen beperken. In het bijzonder trof mij de bedoelde beknoptheid bij de behandeling van het zwaartepunt (symmetrie-eigenschappen) en van het begrip arbeid.

Terwijl zij dus gemeend hebben, van een eenigszins breede uiteenzetting der grondbegrippen te moeten afzien, hebben de schrijvers met succes gepoogd het inzicht der leerlingen te verbeteren, door de wiskundige onderwerpen, die gewoonlijk bij de mechanica ter sprake komen, samen te vatten in een wiskundige inleiding. Deze bevat het rekenen met vrije vectoren, vectorlimieten, het differentieeren, en enkele regels over integraalfunctie en integratieconstante. Jammer genoeg zijn de schrijvers er voor teruggedeinsd, ook de theorie der glijdende vectoren in de wiskundige inleiding op te nemen.

De behandeling der kinematica is zeer geslaagd. Een typische afwijking van de traditioneele foutieve methode is hierin gelegen, dat de verandering van omgeving aan het slot der kinematica is behandeld, en dat vectoroptellingen niet als samenstelling van bewegingen zijn geinterpreteerd. De behandeling van de hypothesen der dynamica is kort, en niet geheel volledig, maar, wat een groote verdienste is, in hoofdzaak juist. De daarop volgende behandeling der krachten werkende op een vast lichaam wijkt het minst van de

traditie af, en is, naar mijn persoonlijk gevoelen, het minst fraaie deel van het boek.

Als geheel beschouwd beteekent dit werk in vergelijking met de thans gebruikte leerboeken der mechanica een groote vooruitgang. Als het spreekwoord, dat het betere de vijand van het goede is, waarheid bevat, en men er uit mag laten volgen, dat de deteriora met het goede zeer bevriend zijn, dan kan dit leerboek een grooten invloed ten goede op het onderwijs in de mechanica hebben. Laat ons hopen, dat dit het geval mag blijken te zijn. J. H. S.

Dr. P. Molenbroek en P. Wijdenes, Vlakke Driehoeksmeting voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 2e druk 1933. 147 blz., gec. *f* 2.25.

Voor dezen tweeden druk, die eigenlijk een nieuw boek is, vraag ik de aandacht mijner collega's, vooral wegens de frischheid en het moderne karakter der vraagstukkenverzameling. Het zal nog wel lang duren, eer b.v. de goniometrische ongelijkheidsopgaven een deel van het gebied der te bewijzen identiteiten in ons onderwijs hebben veroverd, maar een ruim gebruik van dit boek zal zeker de ontwikkeling in de goede richting bevorderen. J. H. S.

Dr. Fred. Schuh, Mechanica-vraagstukken van kantelen en uitglijden. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1933. 121 bladz., *f* 3.25.

Dit boekje is een overdruk van artikelen, die in het tijdschrift „Christiaan Huygens" zijn verschenen, en bevat de volledige behandeling van een paar bekende vraagstukken over kantelen en uitglijden. Ten eerste wordt besproken een symmetrisch lichaam, onderworpen aan zwaartekracht en wrijving, geplaatst op een hellend vlak, ten tweede een symmetrisch lichaam, geplaatst op een ruw horizontaal vlak en onderworpen aan een gegeven horizontale kracht, vervolgens eenige wijzigingen van dit laatste vraagstuk, en ten slotte, in een naschrift, het derde mechanica-vraagstuk van het eindexamen der hoogere burgerscholen in 1932.

Deze vraagstukken worden behandeld met de grondigheid en uitvoerigheid, die men van Prof. Schuh gewend is. Leest men de oplossingen, dan blijkt, dat men met elementaire wiskunde een heel eind komen kan, maar dat somtijds beschouwingen noodig zijn, die volgens de gebruikelijke terminologie tot de hoogere wiskunde behooren. Echter zijn de vraagstukken toch vrij lastig, omdat een groot aantal mogelijkheden afzonderlijk moeten worden behandeld, en de voorwaarden voor het optreden van bepaalde bewegingen tamelijk ingewikkeld blijken te zijn. Door een vernuftig systeem van graphische voorstellingen weet Prof. Schuh het overzicht over de verschillende mogelijkheden te vergemakkelijken.

De behandeling van detailquaesties als deze zou, hoe belangrijk zij uit wetenschappelijk oogpunt moge wezen, in dit tijdschrift niet besproken worden, als er niet een didactische kant aan deze zaak was. De behandelde vraagstukken behooren namelijk tot de traditio-

neele leerstof der middelbare scholen, en, naar thans blijkt, ten onrechte. De ingewikkelde vraagstukken zijn namelijk voor behandeling op middelbare scholen ten eenenmale ongeschikt. De behandling, die de schoolboeken geven, is dan ook in het gunstigste geval zeer onvolledig, maar gewoonlijk fout. De fout bestaat hierin, dat uit betrekkingen, die afgeleid zijn in de onderstelling, dat het systeem in evenwicht is, gevolgtrekkingen worden gemaakt voor gevallen, waarin geen evenwicht heerscht. Prof. Schuh toont dit aan met aanhalingen. uit schoolboeken (waaronder dat van den ondergeteekende). Een dragelijke oplossing van het eindexamen-vraagstuk blijkt de krachten der candidaten verre te boven te gaan.

Wij hebben hier dus te doen met een der niet zeldzame gevallen, waarin een onderwerp, dat door gebrekkig inzicht eener vorige generatie in de leerstof der middelbare scholen is opgenomen, door sleur en traditie op het programma is gehandhaafd. De leerstof van dergelijke onderwerpen te zuiveren is een eerste eisch voor saneering van het onderwijs, en wij moeten Prof. Schuh dankbaar zijn, dat hij een poging in die richting heeft gedaan. Moge die poging succes hebben. Wie, zooals ondergeteekende, weten, hoe sterk de voorliefde voor het traditioneele is — zij dit ook nog zoo foutief —, zijn hierop niet heel gerust.

J. H. S.

P. Wijdenes, *Functies en Grafieken*. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 64 blz., *f* 1.25.

Gaarne voldoe ik aan het verzoek van de redactie van „Euclides" om van bovengenoemd „Werkschrift" eene bespreking te geven.

Uit het voorbericht van den schrijver blijkt, dat dit werkje bedoelt te zijn eene aanvulling op Wijdenes en De Lange, Leerboek der Algebra II en III. Echter kan het werkschrift bij elk boek en ook nà elk boek gebruikt worden. Met enkele opmerkingen, die de heer Wijdenes vervolgens maakt over het gebruik van grafieken in de algebra, kan ik het volmaakt eens zijn. Zeer juist is het, dat het geven van prentjes van statistische gegevens alleen aanloop mag zijn. Evenmin mag men van de grafieken in de algebra de beginselen der Analytische Meetkunde maken.

Inderdaad, „het belang en de beteekenis van de grafieken ligt mede daarin, dat men algebraïsche waarheden en uitkomsten, door redeneering onafhankelijk van waarneming verkregen, in beeld brengt; dat men verband brengt tusschen algebra en andere wetensschappen door met een enkel figuurtje het geleerde in het geheugen terug te roepen en herhaalde redeneering overbodig te maken." Zeer terecht wijst de schrijver er op, hoe verkeerd het is het maximum (of minimum) van $y = ax^2 + bx + c$ met de formule direct te zeggen. Men zie in dit verband ook de verslagen van de Staatsexamencommissie, waarin hierop herhaaldelijk wordt gewezen! Kortom, reeds in het voorbericht geeft de schrijver uiterst belangrijke wenken, die vooral nuttig zijn voor hen, die zelfstandig of met weinig leiding zich voor een examen voorbereiden.

Thans nog enkele opmerkingen over het werkje zelf.

Nadat in de beide eerste paragrafen de begrippen „afhankelijk” en „grafiek” aan voorbeelden zijn duidelijk gemaakt, volgt op blz. 10 (vermoedelijk in § 3, welk paragraafnummer is uitgevallen, evenals het woordje „als” in de hierbedoelde definitie), de definitie van eene functie. Eveneens worden de waarden van x, waarvoor de functie $y = f(x)$ nul wordt, als de *nulpunten* van de functie gedefinieerd.

Aan de hand van talrijke opgaven worden nu in de §§ 4, 5 en 6 functies met hunne grafieken en het begrip coördinaten behandeld, waartusschen alleen in het begin van § 5 de opname van enkele vraagstukken over de reststelling wat vreemd aandoet.

De volgende paragrafen handelen over de lineaire functie van x, snijdende lijnen, evenwijdige lijnen, ongelijkheden, roosterpunten, de grafiek van $y = ax^2 + bx + c$, het teeken van functies van x, uiterste waarden van de tweede graadsfunctie, de orthogonale hyperbool, reeksen, samengestelde intrest, gebroken functies, limiet van een variant, limiet van eene functie.

Ten slotte geeft § 20 een 60-tal vraagstukken ter herhaling en een overzicht van eenige theorie van de algebra.

Het geheel is bewerkt op de bekende, degelijke wijze, die de boeken van den heer Wijdenes kenmerkt. Het buitengewoon rijke vraagstukken-materiaal zal menig docent er toe brengen dit werkschrift bij zijne lessen te gebruiken en maakt het ook bijzonder geschikt voor zelfstudie.

Enkele opmerkingen, die echter niet als minder welwillende aanmerkingen bedoeld zijn, zou ik ten slotte nog willen maken.

Mijne eerste opmerking gaat in de lijn van het slot van het voorbericht, waar de schrijver zelf waarschuwt tegen te ver gaande uitbreiding der grafieken. Het komt mij voor, dat § 14 over reeksen wel achterwege zou kunnen blijven. Menig docent zal graag de kwesties, die zich bij samengestelde intrest voordoen, willen toelichten door middel van gebroken grafieken, maar toepassing van grafieken op de reeksen zal vermoedelijk menigeen te ver gaan. Zoo kon, naar mijne meening, ook § 18, handelende over de limiet van een variant, wel bekort worden en — vooral met het oog op de leerlingen — wat minder geleerd geformuleerd worden.

De tweede opmerking betreft de behandeling van de gebroken functies als $y = \frac{x^2 - x - 20}{x - 4}$, waar wèl de verticale asymptoot behandeld wordt, maar de scheeve asymptoot buiten bespreking blijft. Toch kan deze zeer eenvoudig gevonden worden: Door middel van eene eenvoudige deeling blijkt, dat de functie geschreven kan worden: $y = x + 3 - \frac{8}{x - 4}$. Vergelijking met de rechte $y = x + 3$ voor steeds grooter wordende waarden van x, laat direct zien, dat die lijn de bedoelde asymptoot is. Is deze eenmaal gevonden, dan is het teekenen van de grafiek veel gemakkelijker dan zonder die asymptoot.

Men zal echter begrepen hebben, dat ik ondanks deze opmerkingen *Functies en grafieken* beschouw als een uitnemend werkje, dat ik van harte in de belangstelling der wiskunde-docenten aanbeveel.

H. C. Schamhardt.

Ir. W. J. Vollewens, *Repetitie-dictaat Analyse I* nr. 53. Delft, J. Waltman Jr. 208 blz. *f* 4.25. Id. id. II, 2e druk, nr. 56, 206 blz. *f* 4.25.

Deze werken zijn uitgegeven door de Vereeniging tot het uitgeven van beknopte handleidingen bij het onderwijs aan de Technische Hoogeschool; voor leden zijn de prijzen 50 cents minder.

Inhoud van I. Getallen; functies; limieten; determinanten; complexe getallen; differentieeren; reeksen; maxima en minima; onbepaalde integralen; hoogere machtsvergelijkingen; vraagstukken.

Inhoud van II. Functies van meer dan een veranderlijke; maxima en minima; meetkundige toepassingen in het platte vlak en in de ruimte; bepaalde integralen; booglengte van krommen; oppervlakte en inhoud van lichamen; zwaartepunten en traagheidsmomenten; differentiaalvergelijkingen; vraagstukken.

Deze beide werkjes worden door het voorbericht van nr. 56 als volgt gekarakteriseerd: „Evenals bij de eerste druk wil ik er op wijzen, dat dit boek niet bedoeld is als leerboek, maar als repetitieboek. Daarom zijn vaak stellingen gegeven zonder bewijs of is alleen een aanwijzing tot de bewijsvoering gegeven, waarbij dan verwezen wordt naar leerboeken, die een volledig bewijs van de betreffende eigenschap geven." „Mijn bedoeling is geweest om beknopt een overzicht te geven van wat hoofdzakelijk door studenten in Delft gekend moet worden van de elementaire analyse".

In verband met deze regels uit het voorbericht, kunnen we met een korte bespreking volstaan; daar de samensteller als grondslag dictaten gebruikt zal hebben van de colleges in Delft, is de inhoud in orde en de studenten daar kunnen zelf al geen betere dictaten maken dan deze boekjes, zoodat ze voor studeerenden in Delft sterk worden aanbevolen. Als repetitieboekjes voor K V kunnen ze ook wel dienst doen, al zou ik daarvoor verre verkiezen de Compendiums van Schuh en Rutgers. In nr. 53, blz. 171 trof mij de lijst van veel voorkomende integralen; de methode wordt er bij aangegeven; deze lijst, ook andere van dat slag, zijn zeer practisch.

Jammer, dat de figuren de boekjes ontsieren, vooral die in nr. 56, ongelijk, grof en sommige een bezwaar voor een goed begrip; zie b.v. nrs. 23, 25, 26, 27, 48, 62.

De lijst van aanbevolen boeken aan het eind van nr. 53 toont, dat zeer belangrijke werken die in de laatste 20 jaar in het Nederlandsch zijn verschenen, den heer Vollewens niet bekend zijn. Er worden genoemd 6 Fransche, 6 Engelsche, 13 Nederlandsche en 27 Duitsche; onder die Nederlandsche zijn eenige schoolboekjes en een paar over Rekenkunde. De lijst bevat verscheidene titels van heel oude misschien wel verouderde vreemde boeken. Moet het jonge geslacht niet liever gewezen worden op het feit, dat wij voor verdere studie in de exacte vakken op onze eigen beenen staan?

P. W.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN

$1^1/_2$ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

Ondergeteekende, abonné op { „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" / „Euclides" (het vroegere Bijvoegsel) }

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

ZWIKKER, LEERBOEK DER OPTIEK

ingenaaid à f 12.25, gewone prijs is f 14.75
gebonden à f 13.50, „ „ „ f 16.00

door bemiddeling van den boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Aug. 1933.

S.v.p. doorhalen wat NIET wordt verlangd.

PROSPECTUS

LEERBOEK DER OPTIEK

DOOR

Prof. Dr. C. ZWIKKER

MET MEDEWERKING VAN

Dr. A. C. S. VAN HEEL



Prijs van het complete boek, groot 496 pagina's *f* 14.75, geb. *f* 16.00

P. NOORDHOFF N.V. — 1933 — GRONINGEN-BATAVIA

VERKRIJGBAAR IN DEN BOEKHANDEL

VOORWOORD.

Het gebied der optiek is wel zoo uitgebreid, dat tijdens het schrijven van dit boek mijn aandacht voortdurend gespitst moest blijven op het kort houden van de tekst. Voor de hand liggende uitbreidingen en ,,aardige'' toepassingen zijn dikwijls bewust weggelaten om de omvang van het boek niet boven een practische te laten uitgroeien. Getracht is in ieder hoofdstuk den student (tweede of ouderejaars physicus, chemicus of ingenieur) zoo snel mogelijk van de bekend ondersteldde propaedeutische kennis tot de kern van het probleem te brengen en vervolgens tot aan de vraagstukken, die tegenwoordig de belangstelling der physische wereld hebben.

Het schonk mij groote voldoening, dat Dr. A. C. S. VAN HEEL, privaat-docent aan de Technische Hoogeschool, zich bereid verklaarde, het derde gedeelte, handelende over de afbeeldingsleer, te schrijven. Dat dit gedeelte van de optiek, dat zich tot een aparte leer heeft ontwikkeld, door een bij uitstek deskundige kon worden behandeld, zal het leerboek aanzienlijk in waarde hebben doen stijgen.

Met erkenning constateer ik, dat de uitgever en de redacteur dezer serie mijn opvattingen over het werk konden deelen, waardoor een prettige samenwerking verzekerd was.

Tenslotte wensch ik mijn dank te betuigen aan den Heer D. R. VAN DEN BOS, die de cliché's teekende en den Heer L. G. VAN DER WEES, die het photographische illustratiemateriaal verzorgde.

Delft, Februari 1933. C. ZWIKKER.

INHOUD.

Eerste Gedeelte. De Lichtvoortplanting.

—

Tweede gedeelte. Straling en Absorptie.

—

HOOFDSTUK XVI.

PHOTOMETRIE.

§ 129. Objectieve photometrie.

De photometrie houdt zich bezig met het meten van de energie, door de lichtstraling vertegenwoordigd. Daartoe is een of ander instrument noodig, dat in staat is, in de eerste plaats de aanwezigheid van lichtstraling aan te toonen, in de tweede plaats de sterkte hiervan aan te geven. Het oog voldoet slechts in beperkte mate aan de eischen. Zonder bijzondere inrichtingen kan het oog de lichtsterkte niet in getallen uitdrukken. Er is dan ook in den laatsten tijd een tendentie aanwezig, photometrische metingen zooveel mogelijk zonder tusschenkomst van het oog te verrichten, of, in vaktermen uitgedrukt, om de visueele of „subjectieve" methoden te vervangen door „physische" of „objectieve" methoden.

Er zijn inderdaad diverse apparaten, die ons in staat stellen, stralende energie te meten. Daarvan noemen we eerst het minst belangrijke, de zoogenaamde seleniumcel, welke in hoofdzaak niet anders is dan een dunne draad van het metaal seleen, welk metaal de merkwaardige eigenschap bezit, dat zijn electrische weerstand afhankelijk is van de opvallende hoeveelheid licht. Dit effect gaat echter gepaard met vermoeidheidsverschijnselen, zoodat de weerstandsvermindering tengevolge van de bestraling zeer afhankelijk is van de voorgeschiedenis van de cel, reden, waarom hij weinig meer gebruikt wordt voor photometrisch werk [1]).

Veel belangrijker is de absolute meting van de stralende energie, door deze op te vangen op een zwart gemaakt strookje metaal (platina). Door de temperatuurverhooging, die dit strookje ondergaat, neemt zijn electrische weerstand toe. Zoo'n metaalstrook noemt men een bolometer. Dikwijls geeft men het de vorm van fig. 136. Om de bolometer absoluut af te ijken, zendt men er, bij uitsluiting van stralende energie een electrische stroom door, die aan den bolometer

---

[1]) Zie: G. P. Barnard. The Selenium Cell. London 1930.

een bepaald, te meten, aantal Watts (1 Watt = 10^7 erg/sec.), toevoert en eveneens een weerstandsverhooging doet optreden. De weerstandsverhooging wordt zoo bepaald als functie van de per seconde opgenomen hoeveelheid energie en is daarna een absolute maat voor de hoeveelheid geabsorbeerde stralingsenergie. De weerstandsveranderingen worden gemeten met behulp van een brug van Wheatstone. Op details van de electrische meting kunnen we echter niet ingaan.

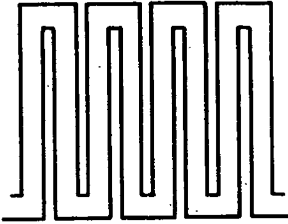


Fig. 136. Bolometer.

Inplaats van op den bolometer kan men de straling ook opvangen op een zwart gemaakt thermokoppel [1]), dat bestaat uit twee, volgens een korte zijde aan elkaar gesoldeerde bandjes van, bijvoorbeeld, constantaan en zilver. Wanneer op de laschplaats energie valt, wordt deze warm en treedt een electromotorische kracht op in een keten, die via het thermokoppel gesloten is. Een galvanometer, in deze keten gebracht, slaat uit. Ook van het thermokoppel is de gevoeligheid op absolute wijze te bepalen door middel van de verwarming door stroomdoorgang [2]).

Een zwak punt bij het gebruik van bolometer en thermokoppel is de niet volkomen zwarting. De gebruikelijke zwarting door middel van fijn verdeeld platinazwart reflecteert nog eenige procenten. Hieraan is tegemoet te komen, door te zorgen, dat alle gereflecteerde straling weer op de bolometer wordt teruggeworpen, wat kan geschieden met een bolvormige spiegel, zooals in fig. 137 is aangegeven. [3])

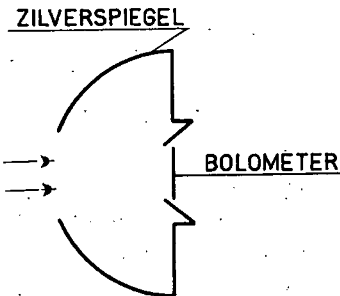


Fig. 137. Bolometer zonder reflexieverliezen.

Het is met behulp van de hier beschreven bolometers en thermokoppels geweest, dat men experimenteel de wet van Planck heeft kunnen verifieeren [3]).

[1]) Ornstein, Moll en Burger. Objective Spektralphotometrie.
[2]) v. Dijck, Zs. f. phys. Chemie, 127, 299, maakt gebruik v. h. Peltier-effect.
[3]) W. W. Coblenz. Journ. of the Opt. Soc. of Am. 5, 131, 1921, 8, 11, 1924.

Om zijn gemakkelijke hanteering en zijn groote gevoeligheid heeft de photocel zich een plaats veroverd in de photometrie [1]). De photocel is een luchtledige ballon, welks wand grootendeels bedekt is met een laagje van een alkalimetaal. Er is slechts een kleine opening helder gelaten om de straling te kunnen laten toetreden. Verder bevindt zich in de ballon een electrode in de vorm van een ring, de zoogenaamde anode. Valt licht op het alkalilaagje, dan gaat het electronen emitteeren, die naar de anode worden getrokken, wanneer men deze positief houdt. De electronenstroom is streng evenredig aan de hoeveelheid invallende straling en wordt gemeten volgens methoden, waarvan de bespreking in de electriciteitsleer thuis behoort.

Een gebrek van de photocel is, dat hij ons niet in staat stelt om de invallende energie absoluut te meten. De photocel is namelijk „selectief", dat wil zeggen, de photostroom is voor 1 watt invallende energie van blauw licht niet dezelfde als voor 1 watt invallende energie van rood licht. Het maximum van de gevoeligheid ligt voor caesium in het rood, voor kalium in het ultraviolet. Men kan de spectrale gevoeligheidskromme van de photocel echter bepalen met behulp van een absoluut geijkt thermokoppel. Deze gevoeligheidskrommen zijn van het karakter van de lijnen, weergegeven in fig. 139.

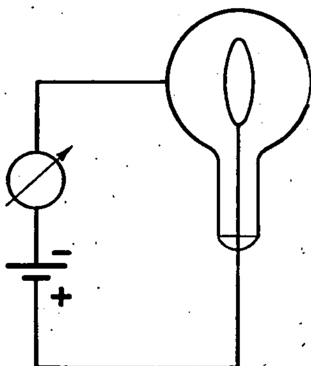


Fig. 138. De photocel.

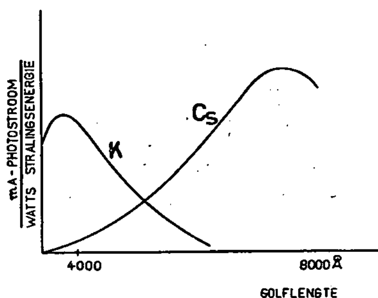


Fig. 139. Spectrale gevoeligheidsverdeeling van photocellen.

[1]) Campbell & Ritchie, Photoelectric Cells, London 1929.

§ 130. De photografische plaat.

Voor spectroscopisch werk is de photografische plaat zeer dikwijls gebruikt voor photometrische doeleinden, doordat de zwarting een maat is voor de hoeveelheid ingevallen energie [1]). De speciale voordeelen van de photografische plaat zijn, in de eerste plaats, dat hij gebruikt kan worden bij zeer kleine intensiteiten, omdat men de belichtingsduur zeer lang kan kiezen, in de tweede plaats, dat men in de photographische plaat een blijvend document van de meting bezit.

We zullen eerst uiteenzetten, wat men quantitatief onder zwarting verstaat. Men laat een zeer fijne lichtbundel (wit licht) door de gebruikte plaat vallen en wel achtereenvolgens op een plaats, die niet belicht is geweest, daarna op een belichte plaats. Als de intensiteiten van de doorgevallen lichtstraal in deze beide gevallen respectievelijk i_0 en i zijn, dan definieert men de zwarting S van de onderzochte plaats als volgt:

$$S = \log \frac{i_0}{i}.$$

waarbij de gewone, decimale, logarithme genomen wordt.

Het meten van de zwarting geschiedt op een zoogenaamde microphotometer. Het voorvoegsel „micro" slaat op het gebruik van de fijne lichtbundel. Veel verbreid is de microphotometer van Moll [2]), die in den regel gebruikt wordt voor het meten van de zwarting van het beeld van spectraallijnen, welke beelden over een zekere lengte constante zwarting hebben. De verlichte spleet S (fig. 140) wordt door middel van de lens L_1 afgebeeld op de te onderzoeken plaats van de plaat P en daarna door middel van de lens L_2 op de thermozuil T. Deze thermozuil bevat een groot aantal thermokoppels, die in een rechte lijn geplaatst zijn achter een spleet (lineaire thermozuil).

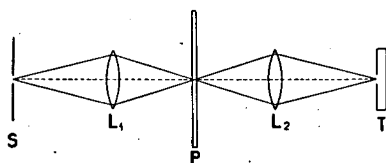


Fig. 140. Microphotometer.

1) H. B. Dorgelo, Die photographische Spektralphotometrie, Phys. Zs. 26, 756, 1925.
2) W. J. H. Moll, Kon. Acad. v. Wetensch. Amsterdam, 28, 566, 1919.

VRAGEN VAN HET MONDELING STAATSEXAMEN 1932

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT.

I. MEETKUNDE.

1. Van een afgeknotte vierzijdige pyramide is gegeven: het grondvlak ABCD in ware gedaante en de projectie op het grondvlak van de ribbe A_1B_1 van het bovenvlak. Maak de projectie van het bovenvlak af. Construeer vervolgens de ware gedaante van het opstaande zijvlak ABB_1A_1; daarbij de constructie verklaren met behulp van een ruimtefiguur.

2. In $\triangle$ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE, die elkaar in H snijden; bewijs, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is. Waarom liggen de punten A, B, D en E op één cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is en de punten niet op een rechte liggen.

3. Van een regelmatige vierzijdige pyramide TABCD is gegeven: de ribbe van het grondvlak $= a$, de opstaande ribbe $= a\sqrt{2}$. Construeer de doorsnede van deze pyramide met een vlak door B loodrecht op de ribbe TD.

4. Teeken in ware gedaante het zijvlak TAD van de onder 3. genoemde pyramide. Het vlak van doorsnede snijdt TAD volgens een lijn. Hoe loopt deze? Hoe liggen de snijpunten van deze lijn met TA en TD? Bereken de stukken, waarin het lijnstuk TA verdeeld wordt.

5. $\triangle$ ABC ligt in 't vlak van teekening en wordt nu om AB gewenteld. De projectie van C op 't vlak van teekening is C_1. Construeer de hoek, waarover men de driehoek moet wentelen, opdat $\angle AC_1B = 90°$ is. Wat beschrijft BC bij die wenteling; wat punt C?

6. Op de zijde AB van $\triangle$ ABC is een parallelogram $ABED_1$ en

op de zijde AC een parallelogram $ACFD_2$ beschreven. Deze figuur is een deel van het netwerk van een driezijdig prisma. Construeer van dit prisma: de hoogte, de stralen van de in- en omgeschreven cylinders; ook de hoek, die AD met het grondvlak maakt.

7. In een viervlak D . ABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak, evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der deelen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt.

Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan grooter, $\angle$ DAC of $\angle$ DAD_1? En waarom?

8. Van $\triangle$ ABC (basis AB) zijn de zijden AC $= 6$, CB $= 8$, AB $= 10$. Bereken de afstand $M_o M_i$ van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel. Wat is de meetkundige plaats van M_i als C de halve cirkel op AB doorloopt? Bewijs door berekening, dat $\angle AM_i M_o = 90°$ is.

9. In viervlak D . ABC brengt men een bol aan, die door A, B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC, als AD $= 6$, DB $= 8$, DC $= 9$ cm? Noem de snijpunten met DB en DC opv. S en T. Hoe verdeelt het vlak AST de inhoud van het viervlak?

Neem L op AD en P op BC. Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.

10. In $\triangle$ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE en verbindt E met D. Bewijs, dat opp. $\triangle$ CED $= \frac{1}{2}$ opp. $\triangle$ ABC, als $\angle C = 45°$ is. Laat ook zien, dat de omgeschreven cirkels van $\triangle$ CED en van AEDB evengroot zijn. Onder welke hoek snijden deze cirkels elkaar?

11. Een kegel geeft bij ontwikkeling het oppervlak van een halve cirkel, die gegeven is. Bereken de inhoud van de kegel; construeer de asdoorsnede. Welk deel van de ingeschreven bol ziet men van uit de top? Breng door een gegeven lijn l door de top de beide raakvlakken aan de kegel. Construeer in ware grootte de hoek, die deze raakvlakken met elkaar maken.

12. Gegeven de 5-zijdige pyramide TABCDE; neem op AT het punt P, op BT het punt Q en op TD het punt R; construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide.

13. Leid de inhoud af van de afgeknotte pyramide.

14. Wat verstaat ge onder de uitdrukking: een lijnstuk is in uiterste en middelste reden verdeeld? Hoe berekent men het groot-

ste stuk? En hoe wordt het geconstrueerd? In welke figuren komt deze gulden snede voor? Bewijs, dat de diagonalen van een regelmatige vijfhoek elkaar in uiterste en middelste reden verdeelen.

15. Wat verstaat men onder een zwaartelijn van een viervlak? Welke eigenschap hebben de zwaartlijnen? Bewijs dit. Als van een viervlak gegeven zijn: het grondvlak in ware gedaante, de hoogte en het voetpunt van de hoogtelijn uit de top, construeer dan het netwerk en de afstand van een hoekpunt van het grondvlak tot het zwaartepunt.

16. Leid de formule af voor de straal van de omgeschreven cirkel van △ ABC.

17. Verdeel △ ABC in 2 (of 3) gelijke deelen door lijnen te trekken uit een punt P op een der zijden.

18. Construeer de doorsnede van een prisma met een vlak, bepaald door 3 punten op de opstaande ribben gelegen.

19. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in ware gedaante en drie der opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op 3 der opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak, door die punten bepaald, met de pyramide, zoowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

20. Construeer een gelijkzijdige driehoek (een vierkant), waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van twee gegeven gelijkzijdige driehoeken (opv. twee gegeven vierkanten).

21. Verander een gegeven driehoek in een even groot vierkant.

22. Een trapezium is in een halve cirkel beschreven (straal R). De middellijn is één der evenwijdige zijden, de andere is $2x$. Verder kan in dat trapezium een cirkel worden beschreven. Druk eerst de straal r van de ingeschreven cirkel uit in R en x en vervolgens x in R. Construeer ten slotte x.

23. In een regelmatige 4-zijdige pyramide TABCD neemt men op TB het punt P, zoodat TP : PB = 2 : 1 en Q op 't midden van TC. Men brengt het vlak door A, P en Q. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der beide deelen, waarin dit vlak de pyramide verdeelt.

24. Van een viervlak D . ABC is het grondvlak een driehoek met zijden AB = 10, AC = 6, BC = 8 cm. De opstaande ribben maken hoeken van 60° met het grondvlak. Bepaal de inhoud; de straal R van de omgeschreven bol; ook die van de ingeschreven bol.

Eveneens de afstand, waarop de hoogtelijnen DD_1 en AA_1 elkaar kruisen. (Aanwijzing: twee hoogtelijnen liggen in evenwijdige standvlakken!)

25. Van prisma $\frac{DEF}{ABC}$ zijn de zijden van het grondvlak AB = 13, BC = 14, CA = 15 cm. Er kan een bol in en ook om beschreven worden. Bereken de inhoud.

Neem vervolgens op DF het punt P, op DE het punt Q en op EB het punt R. Construeer de doorsnede van het vlak PQR met het prisma. Verbind F met een punt G op AB en bepaal, waar FG het vlak PQR snijdt.

26. In △ ABC trekt men uit een punt P op AB twee lijnen PQ (Q op AC) en PR (R op BC) zóó, dat PQCR een koordenvierhoek is. Bewijs, dat de vorm van △ PQR constant is. Laat nu P zich langs AB bewegen. Bewijs, dat de verhouding van de stralen der omgeschreven cirkels van △ ACP en △ BCP niet verandert, evenmin als de hoek, waaronder die cirkels elkaar snijden.

27. Een rechthoekige driehoek TAM met zijden AM = 6, MT = 8, AT = 10 wentelt om TM als as en beschrijft dus een kegel. Verder beschrijft men een bol met T als middelpunt met straal TQ < TM. Welk deel van het boloppervlak ligt binnen de kegel? Bewijs, dat dit oppervlak gelijk is aan het ronde oppervlak van een cylinder met dezelfde hoogte als het bolsegment en met een straal, die gelijk is aan de straal van de bol. Ontwikkel de kegel in een plat vlak en construeer de middelpuntshoek van de cirkelsector.

28. Teeken een afgeknotte 4-zijdige pyramide en daarin de diagonalen. Welke snijden elkaar en welke kruisen elkaar? Noem de top van de kegel T, 't bovenvlak van de afgeknotte kegel PQRS en het grondvlak ABCD. (P ligt op TA enz.). Wanneer snijden BS en CP elkaar? Als dit zoo is, dan snijden ook AR en DQ elkaar. Denk dat PT : PA = 3 : 2. Welke is dan de verhouding van de inhouden van $\frac{T}{PQRS}$ en $\frac{PQRS}{ABCD}$?

29. Op een lijn neemt men RQ = QP en trekt door R en Q twee evenwijdige lijnen. Door P trekt men een lijn, die deze evenwijdigen snijdt in S en T. Gevraagd PST zóó te trekken, dat opp. trap QSTR = opp. gegeven vierkant; (of ook zóó, dat ∠ QVR = 60° is). Vervolgens vouwt men △ PQS om QS om over een hoek

van 90°. Gevraagd van pyramide $\frac{P}{QSTR}$ de hoeken te construeeren van de vlakken PQS en PRT, alsmede die van vlak QPR met vlak PST. Als het oppervlak van △ QVS = 1 cm² is, hoe groot is dan opp. △ PRT?

30. Door hoeveel punten is een bol bepaald? Hoe vindt ge het middelpunt? Construeer een bol, die door 3 gegeven punten gaat en een gegeven lijn raakt.

31. Construeer 2 lijnstukken, als hun verschil en hun middelevenredige gegeven zijn.

Leid de formule af voor de straal van de ingeschreven cirkel van een driehoek. Bereken ook de afstanden van de hoekpunten tot de raakpunten met de in- en aangeschreven cirkels.

32. Construeer △ ABC als gegeven zijn: de basis c, de tophoek C en een punt P van de bissectrix van de tophoek.

33. Construeer een cirkel, die een gegeven cirkel in een gegeven punt raakt en bovendien een gegeven rechte lijn raakt.

34. Construeer $x = a\sqrt[4]{3}$, als a een gegeven lijnstuk voorstelt.

35. In een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ brengt men een vlak door H en de middens P van EA en Q van BC. Construeer de doorsnede van dit vlak met de kubus en bereken de inhoud van het onderste afgesneden deel van het lichaam.

36. Construeer een koordenvierhoek ABCD, waarvan gegeven zijn: de beide diagonalen, hoek B en de hoogtelijn uit B van △ ABC. Neem vervolgens deze koordenvierhoek tot grondvlak van een pyramide, waarvan nog gegeven zijn de hoogte en het voetpunt der hoogtelijn. Construeer het netwerk van die pyramide. Waarom kan om die pyramide een bol beschreven worden? Construeer de straal van die omgeschreven bol.

37. In hoekpunt A van △ ABC trekt men de raaklijn aan de omgeschreven cirkel; in B richt men de loodlijn op BC op, die de eerstgenoemde raaklijn in D snijdt. Vervolgens trekt men de middellijn AF van de omgeschreven cirkel, die BC in E snijdt en verbindt E met D. Bewijs, dat AB × DE = AF × BD is.

38. In de rechthoekige △ ABC (C = 90°) trekt men de zwaartelijnen AD en BE. Als AD = $\sqrt{73}$ en BE = $2\sqrt{13}$ is, bereken dan de zijden, de straal van de om- en die van de ingeschreven cirkel van △ ABC.

39. Van pyramide TABCD is het grondvlak een vierkant

(zijde a) en staat TA $= a$ loodrecht op het grondvlak. Men brengt het bissectrice-vlak aan door de ribbe BC. Construeer de doorsnede van dit vlak met de pyramide, zoowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

40. In een cirkel trekt men twee elkaar snijdende koorden AC en BD. Uit D trekt men BQ $\perp$ AC en uit C de lijn CR $\perp$ BD. De lijn RQ snijdt, verlengd, de cirkel in E en F en de lijn CB in G. Bewijs, dat GE $\times$ GF $=$ GQ $\times$ GR is en dat QR // AD loopt.

41. Wat is de meetkundige plaats van de toppen der driehoeken, die alle dezelfde basis en gelijke tophoeken hebben? Construeer die meetkundige plaats. Leid nu af de meetkundige plaats van de zwaartepunten dezer driehoeken.

42. In een kubus $\begin{matrix}EFGH\\ABCD\end{matrix}$ brengt men een vlak door een punt P op EH, een punt Q op AB en een punt R op CG. Teeken de doorsnede. Bepaal de afstand, waarop DF en GC elkaar kruisen; eveneens die van DF en AC. Vervolgens brengt men twee kegels aan, die de ribben van de drievlakshoeken A en G tot beschrijvende lijnen hebben; bepaal de inhoud van het deel der ruimte, dat deze kegels gemeen hebben. Waar ligt het middelpunt van de bol, die door G gaat en raakt aan de ribben, die in A samenkomen? Construeer de meridiaan-doorsnede van de kegel, beschreven om drievlakshoek A.DHC in ware grootte.

43. Twee cirkels snijden elkaar. Uit een punt S buiten de cirkels op de gemeenschappelijke snijlijn gelegen, trekt men een snijlijn SAB aan de eene en SCD aan de andere cirkel. Waarom is nu ABDC een koordenvierhoek? Als we nu deze figuur projecteeren op een ander vlak, dat een hoek maakt met het vlak van teekening, en de projecties zijn A_1, B_1, D_1 en C_1, kan dan A_1, B_1, D_1, C_1 ook een koordenvierhoek zijn?

Men vouwt nu het eene deel van de figuur om de gemeenschappelijke snijlijn over een hoek van 90° om. Construeer de straal van de bol, die door de beide cirkels bepaald is.

44. Gegeven een driehoek, ABC. Als CP de hoogtelijn is, is dan CP middelevenredig tusschen AP en BP? Hoe zou men CP moeten trekken, dat dit wèl het geval is?

45. Van een gegeven driehoek een vierhoek af te snijden, waarom en waarin een cirkel beschreven kan worden.

46. Verdeel een vierhoek in twee deelen van gelijke oppervlakte door een lijn uit een hoekpunt.

47. Verdeel de oppervlakte van △ ABC in twee gelijke deelen door een lijn, evenwijdig aan een gegeven lijn l.

48. In een driezijdige pyramide T. ABC brengt men het vlak PQR // ABC aan, zoodat TP : PA = 2 : 3. Men verbindt P met het midden D van BC; Q met het midden E van AC; R met het midden F van AB. Bewijs, dat PD, QE en RF door één punt gaan. Als de inhoud van pyramide S.PQR = 1 cm^3 is, bereken dan de inhoud van de heele pyramide. (Aanwijzing: bereken eerst de verhouding PS : SD en vergelijk daarna de inhoud van SPQR met T.PQR enz.).

49. In de rechthoekige △ ABC (∠ C = 90°) is D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Door D trekt men een willekeurige lijn DQ (Q op CB) en loodrecht daarop DP (P op AC). Bewijs, dat de vorm van △ PDQ onveranderd blijft, als Q de zijde CB doorloopt. In welke stand is opp. △ PDQ = ½ opp. △ ABC?

50. In een gelijkbeenig trapezium met evenwijdige zijden 5 en 3,2 kan een cirkel beschreven worden; bereken de straal van deze cirkel. Vervolgens beschouwt men dit trapezium als grondvlak van een pyramide met hoogte = 4,8. De top ligt loodrecht boven het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het grondvlak. Construeer het netwerk; waarom kan in deze pyramide een bol beschreven worden? Construeer en bereken de straal van de ingeschreven bol.

51. Van △ ABC is AB = 21, BC = 20, AC = 13 cm. Op AB neemt men AD = 12 cm en beschrijft met CD tot middellijn een cirkel, die AC in E snijdt. Bereken EC.

52. Hoe zoudt ge door een punt P een lijn construeeren, die een gegeven lijn loodrecht kruist en die evenwijdig loopt aan een gegeven vlak?

53. Construeer een koordenvierhoek, waarvan gegeven zijn: een hoek, de beide diagonalen en de hoek, die de diagonalen met elkaar maken.

54. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60°; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120°. Bereken de inhoud van de pyramide. Heeft de pyramide ook een ingeschreven bol? En ook een omgeschreven bol?

55. Gegeven een cirkel; construeer een tweede cirkel met gelijke straal zóó, dat de gemeenschappelijke koorde gelijk is aan de zijde van de ingeschreven regelmatige vijfhoek. Verbind de uiteinden van die koorde met het verst verwijderde punt van de tweede cirkel en beschouw deze figuur als een deel van het netwerk van een regelmatige pyramide. Construeer de hoogte van die pyramide.

56. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van △ ABC tot zij de omgeschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat bg AQ = bg AR enz.; vervolgens, dat HD = DP, HE = EQ en HF = FR. Wat zijn de hoogtelijnen van △ DEF in △ PQR? Waaraan herinnert dit? Welk verband is er tusschen △ DEF en △ PQR? Wat weet ge van de omgeschreven cirkels van deze twee driehoeken? Noem de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen opv. K, L en M. Wat is er te zeggen van de omgeschreven cirkel van △ KLM?

57. Construeer in △ ABC een gelijkzijdige driehoek, waarvan de hoekpunten liggen op de zijden van △ ABC en één zijde evenwijdig aan AB loopt.

58. Wat is een prismoïde? Leid de formule voor de inhoud van een prismoïde af. Noem enkele lichamen, die als prismoïde beschouwd kunnen worden.

59. Door een gegeven lijn *a* een vlak te brengen zoodat de projecties van twee kruisende lijnen *b* en *c* op dat vlak evenwijdig loopen.

60. Om een gegeven cirkel een gelijkbeenig trapezium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven vierkant.

61. Teeken een regelmatige vierzijdige pyramide. Onderzoek, in welk geval de om- en de ingeschreven bol concentrisch zijn.

62. Op de verlengden van de beenen BA en BC van een gelijkbeenige △ ABC neemt men opv. de punten P en Q, zóó dat $PA \times QC = AC^2$ is. Wat is de meetkundige plaats van het snijpunt S van AQ en CP?

63. Van een bolsector is de bolvormige oppervlakte gelijk aan de kegelvormige oppervlakte. Druk de hoogte van het bolsegment uit in de straal van de bol.

64. In een driehoek twee cirkels te construeeren, met gelijke straal, die beide de basis raken, elkaar raken en ieder aan een opstaande zijde raken.

PROSPECTUS

WIS- EN NATUURKUNDIGE AARDRIJKSKUNDE

EEN LEIDDRAAD BIJ HET ONDERWIJS EN BIJ ZELFSTUDIE

MET VRAGEN EN OPGAVEN TER OEFENING EN REPETITIE

DOOR

PROF. DR. H. BLINK EN
PROF. W. E. BOERMAN

ZESDE, GEHEEL HERZIENE DRUK

MET KAARTJES, TEEKENINGEN EN AFBEELDINGEN



Prijs van het complete boek groot 268 pag.'s . . . . f 2.40
Stevig in linnen gebonden f 2.90

P. NOORDHOFF N.V., 1932 — GRONINGEN - BATAVIA

IN DEN BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR

VOORBERICHT BIJ DEN ZESDEN DRUK.

Aangezien de schrijver van dit boekje, prof. BLINK, in December 1931 is heengegaan, heeft ondergeteekende, die reeds aan den vierden en den vijfden druk mocht medewerken, de verzorging van dezen zesden druk geheel op zich moeten nemen. Daarbij heeft het, aanvankelijk onder den naam „Eerste Beginselen der Wis- en Natuurkundige Aardrijkskunde" verschenen, boekje weder verschillende wijzigingen — wij hopen verbeteringen — ondergaan. Het is hier en daar wat uitgebreid, waardoor het als leerboek bij het Middelbaar Onderwijs zeker niet aan waarde verloren heeft. De leeraar kan desgewenscht vele gedeelten (meestal klein gedrukt) als leerstof schrappen. De aanwezigheid van deze nadere uiteenzettingen kan echter vooral haar nut hebben, wanneer door de leerlingen naar het waarom der dingen gevraagd wordt. Op wensch van enkele gebruikers zijn de bij het boek behoorende schetskaartjes ditmaal niet in een afzonderlijk atlasje gegeven, doch bij de desbetreffende gedeelten van den tekst opgenomen. Voor de plaatsing der kaartjes zij verwezen naar de inhoudsopgave achterin het boek. Doch het is niet bij deze uiterlijke verandering gebleven, dank zij de voortvarendheid van den uitgever, die met de verschillende wijzigingsvoorstellen onmiddellijk accoord ging en die toch de oude prijs van het boek wist te handhaven. Er werd een flinker formaat voor het boek vastgesteld; met groote zorg is een lettertype gekozen, dat zich gemakkelijk laat lezen; tal van nieuwe kaarten, figuren en afbeeldingen zijn aan de bestaande toegevoegd of hebben deze vervangen.

Het is gebleken, dat een meer stelselmatig overzicht der kaartprojectiemethoden dan de vorige druk verschafte, wel gewenscht is. Daarom werden de desbetreffende paragrafen geheel nieuw geschreven en zooveel mogelijk van goede toelichtende afbeeldingen voorzien. Aangezien ook meermalen bezwaren waren geuit tegen de onvoldoende en daardoor verkeerde voorstelling van het ontstaan van de getijden, is getracht, aan de hand van de geschriften van Dr. J. P. VAN DER STOK en J. L. H. LUYMES, een verklaring te geven, welke — met weglating van alle mathematische formules — toch eenig idee geeft van de wijze, waarop de getijverwekkende krachten onze wereldzee in beweging brengen. Voor een soortgelijke taak stond ik t.a.z. van de nieuwe opvattingen omtrent het ontstaan van cyclonen; ik hoop met de uiteenzetting van de nieuwe cyclonen-theorie van BJERKNES voldoende te zijn geslaagd. Eindelijk was het noodig om, naast de verouderde indeeling van de aarde in klimaat-provinciën volgens SUPAN, de meer moderne verklarende klimaatindeeling van KÖPPEN op te nemen. Meer of minder daarbij aansluitend is de kaart van de klimatische hoofdgrondsoorten volgens GLINKA, welke den directen en den indirecten invloed van het klimaat op de productieve kracht van de verschillende gebieden der wereld heeft aan te toonen.

In het bijzonder heb ik Prof. Dr. E. VAN EVERDINGEN te danken voor de welwillendheid om, ondanks zijn drukke werkzaamheden, toch nog het meteorologische, klimatologische en oceanografische gedeelte van het boek te willen doorlezen en van tal van opmerkingen en kantteekeningen te voorzien. De heer J. SCHOKKENKAMP was zoo vriendelijk de nieuwe paragrafen over de kaartprojecties door te lezen.

Door een en ander is er al zooveel gewijzigd geworden, dat ik meende het daarbij te moeten laten. Ik hoop echter, dat het boekje èn voor het onderwijs èn voor zelfstudie aan bruikbaarheid zal hebben gewonnen. Van welwillende op- en aanmerkingen, welke mij, naar ik hoop, niet zullen worden onthouden, zal voor een volgende bewerking dankbaar gebruik gemaakt worden.

ROTTERDAM, Juli 1932. W. E. BOERMAN.

A. **De meridiaan.** *De vertikaalcirkel van een plaats, die door de hemelpolen gaat, noemt men den* **meridiaan** *of* **middagcirkel** *van die plaats. De lijn, volgens welke de meridiaan den horizon snijdt, is de lijn Noord-Zuid; de eindpunten dezer lijn zijn het Noordpunt en het Zuidpunt van den horizon.*

Door eenvoudige waarneming kan men den meridiaan eener plaats aanwijzen. In het noorden van onzen hemel staat een groep van 7 sterren, die ieder bekend is. Dat is het sterrenbeeld de *Groote Beer* of *Wagen,* (naar den vorm in den volksmond ook wel de *Ploeg* geheeten, (zie fig. 3). Dit sterrenbeeld wentelt dagelijks aan en met den hemel rond, en wijzigt voortdurend zijn stand ten opzichte van den horizon. Maar de twee voorste sterren van die groep, α en β, wijzen altijd naar een in 't oog vallende ster, ongeveer vijfmaal den afstand α—β van α verwijderd. De bedoelde ster heet de *Poolster.* De Poolster heeft bijna geen dagelijksche beweging; men kan haar altijd, des avonds, des morgens, en ook overdag, (als de zon met haar licht dit althans niet zou beletten), ongeveer op hetzelfde punt aan het hemelgewelf vinden. Dicht bij de poolster ligt een punt aan den hemel, dat in het geheel niet rondwentelt en altijd in rust blijft; dat is de *pool des hemels.*

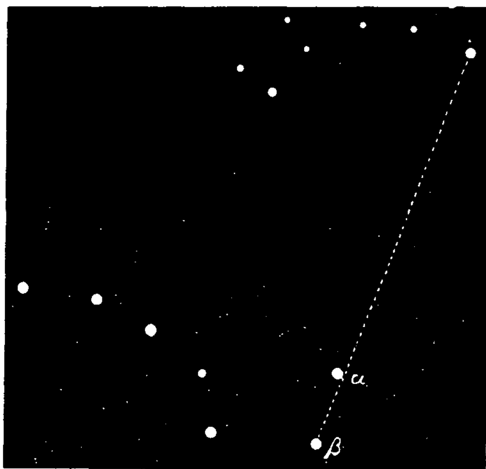


Fig. 3. De Groote Beer of Wagen en de Kleine Beer, met de Poolster.

Voor elke plaats is er steeds één vertikaalcirkel te denken, die ook door de beide polen gaat; men noemt dien den **hemelmeridiaan** of **middagcirkel** van die plaats. De lijn, volgens welke deze cirkel de aardoppervlakte snijdt, is de *meridiaan op aarde.* Elke plaats heeft een eigen meridiaan. De meridiaan snijdt voor elke plaats den horizon in een lijn *zuid—noord,* en geeft aldus het *zuidpunt* en het *noordpunt* van den horizon aan. Als men van de hemelpool een loodlijn neerlaat op den horizon, wijst het snijpunt ook het *noordpunt* aan.

Het gedeelte van den horizon, dat aan dien kant der lijn ligt, waar de zon opkomt, heet de *ooststreek,* (*orient* = de morgen, het oosten); — het deel, hetwelk aan den kant ligt, waar de zon ondergaat, heet de *weststreek* (occident = ondergang der zon, avondland, het westen) van den horizon.

B. **De hemelstreken.** *De vertikaalcirkel van een plaats, die den meridiaan rechthoekig snijdt, noemt men* **eersten vertikaalcirkel.** *De eerste vertikaalcirkel snijdt den horizon in de lijn Oost-West, en wijst de Oost- en Westpunten van den horizon aan.*

graden vast te stellen, en door nu van dit gedeelte van den meridiaan de afstandlengte werkelijk te meten kan men hieruit den geheelen omtrek van den meridiaan afleiden en vervolgens ook de straal, de oppervlakte en den inhoud van den aardbol berekenen.

Het „meten" der aarde bestaat derhalve in het nauwkeurig zoeken naar de lengte van één graad van een grooten cirkel; men spreekt daarom van *graadmeting*. Deze voert men uit door middel van een stelsel van *driehoeksmeting* of *triangulatie*.

De graadmetingen hebben omtrent de afmetingen der aarde de volgende uitkomsten opgeleverd:

De straal der aarde is 6370 km.

De groote cirkel der aarde meet 40 millioen meter.

Een graad van den grooten cirkel is 111 km.

De aardoppervlakte bedraagt 510 millioen km^2.

Onze landgenoot, Willebrord Snellius, hoogleeraar te Leiden, mat reeds in 1615 den meridiaan tusschen Alkmaar en Bergen-op-Zoom, daarbij het hoekmetingssysteem toepassende, dat sedert naar hem genoemd is geworden. Verschillende latere graadmetingen van Fransche zijde (o.a. Picard in 1670; Cassini in 1680) gaven zóó verschillende uitkomsten, dat men aan den bolvorm der aarde ging twijfelen. Ook de slingerproeven van Richer in 1670 te Cayenne hadden merkwaardige uitkomsten gegeven: de „secondeslinger" van Cayenne bleek nl. korter te moeten zijn dan die in Parijs. (En men had de, naar men meende, constante lengte van den secondeslinger nog wel voorgeslagen als eenheid van lengtemaat!). Met de slingerwetten van Chr. Huygens waren echter deze uitkomsten te verklaren. En zoo kwam Newton tot de conclusie, dat de aarde aan haar draaiende beweging (zie § 12) haar afgeplatten vorm (ellipsoïde) dankt. Intusschen hadden de metingen van Cassini ongelukkigerwijze het tegendeel als resultaat gegeven. Daarom werden in den aanvang van de 18e eeuw door de Fransche Academie van Wetenschappen nieuwe expedities uitgerust. Bouguer en La Condamine verrichtten in 1735—39 een graadmeting in Peru, terwijl De Maupertuis hetzelfde deed in Lapland. Het bleek nu inderdaad, dat de aarde een ellipsoïde moest zijn. Nadat de uitkomsten waren berekend, werd tevens een eenheid van lengtemaat vastgesteld ter lengte van $^1/_{40\,000\,000}$ van den equatoromtrek! Men noemde dien den *meter*. Later bleek in de berekeningen een fout te zijn geslopen, de aardomtrek bleek iets grooter te zijn, met het gevolg, dat onze meter iets te klein is. De lengte-eenheid is echter om practische redenen niet meer gewijzigd, zoodat de equatoromtrek thans 40.077 km bedraagt. De meridiaanomtrek is 40.009 km. Zou de aarde, bij denzelfden inhoud als nu, den zuiveren bolvorm hebben, dan zouden alle groote cirkels (meridianen zoowel als de equator!) een omtrek van 40.024 km hebben.

De werkelijke *afmetingen der aarde* — voorzoover zij door de jongste berekeningen van Helmert en Hayford werden benaderd — zijn als volgt:

straal van den equator ($= a$)	6378.4	km
straal bij de polen ($= b$)	6356.9	km
afplatting (quotient $\frac{a-b}{a}$)	$\frac{1}{296.96}$	
uitbuiking aan den equator ($a - b$)	21.5	km

stadium; 1 kabellengte is weer ongeveer 100 vadem of vaam (Eng. fathom), of 200 ellen of (Eng. yards). Nu is het voor den zeeman zoo gemakkelijk om de afstanden in zeemijlen uit te drukken, omdat hij dan deze afstanden direct van de kaart kan afmeten of daarop kan uitzetten. Een zeemijl blijkt n.l. ongeveer gelijk te zijn aan een minuutboog van den grooten cirkel d.i. dus den equator of den meridiaan. Ongeveer! want aangezien deze beiden niet gelijk zijn en (doordat de aarde niet den zuiveren bolvorm heeft) zelfs de minuutbogen van denzelfden meridiaan op lagere en hoogere breedten niet gelijk zijn, blijkt ook de zeemijl op de kaart gemeten te varieeren; zij is bij den equator iets langer (n.l. 6092 voet, of 1856,7 meter) en op hoogere breedte iets korter (b.v. 60° breedte: 6046 voet, of 1842,7 meter). Voor snelheidsmetingen is de zeemijl echter vastgesteld op 6080 voet of 1853 meter).

Nu was het in de Oudheid en in de Middeleeuwen wel gemakkelijk de breedte van de plaats van waarneming vast te stellen; niet zoo gemakkelijk was de bepaling van de lengte. (Zie § 7). Fouten bleven er echter altijd nog bestaan. Wel hielp de zandlooper in het overbrengen van den tijd, maar dat was toch nog niet nauwkeurig genoeg. Men was aangewezen op de meting van d a g r e i z e n en pas na veelvuldiger reizen wellicht wat nauwkeuriger in z e e m ij l e n. Het is dan ook begrijpelijk, dat de in dien tijd gemaakte plaatsbepalingen in de Oost-Westrichting altijd fouten gaven. Deze foutieve lengtebepalingen waren het dan ook, die in de dagen van Columbus aanleiding gaven tot de opvatting, dat men, van Portugal Westwaarts varende, al spoedig in China moest komen. Dat daar tusschen nog een continent en zelfs nog een groote oceaan moesten liggen, kon men niet vermoeden. Ook de globe van den Duitscher Martin Behaim, uit den zelfden tijd, brengt deze foutieve voorstellingen geheel in beeld.

Nu had voordien de uitvinding van het kompas de zeevaart al weer zeer veel veiliger en vaster gemaakt. De Italiaansche zeevaarders maakten dan ook al spoedig kaarten, die op het gebruik van het kompas waren ingericht. Op elk belangrijk punt was een w i n d r o o s geteekend, waarvan de hoofdrichtingen werden doorgetrokken over de geheele kaart. Men kon dus het azimut van alle plaatsen in de omgeving t.o.z. van bedoeld belangrijk punt op de kaart aflezen, en bovendien ten naastenbij de afstanden, waarop zij van dat punt verwijderd waren. Ook stonden op deze kaarten wel de meridianen geteekend en de parallellen. De ervaring had geleerd, dat men onder een vasten bepaalden koers (d.i. hoek met den magnetischen meridiaan) sturend b.v. van punt A in punt B moest komen. Dat punt B werd dan weer een nieuw middelpunt van koerslijnen, van een windroos dus. Zoo werden deze kaarten ware spinnewebben van kompasrozen en koerslijnen. Men noemde de kaarten p o r t u l a n e n.

Zoodra de tijdbepaling nauwkeuriger ging geschieden (nauwkeuriger zandloopers) werd de lengtebepaling zuiverder en werd dus ook de landteekening t.o.z. van de meridianen beter. De kompasrozen geraakten dientengevolge meer en meer op de kaarten in onbruik, de meridianen en parallellen kwamen in gebruik. Voor metingen waren de kaarten echter nog niet gemakkelijk. En zoo werd aanvankelijk door de Hollandsche zeevaarders ook maar liever een globe medegenomen aan boord van de schepen. Pas later werden de globes weer afgeschaft, n.l. toen men over de hulpmiddelen beschikte om de bolvormige aardoppervlakte zonder al te groote fouten in een plat kaartvlak te brengen.

Men begreep n.l., dat de kaart, welke uit de portulaan was ontstaan en waarin de meridianen waren geteekend als rechte evenwijdige lijnen, welke de eveneens evenwijdige parallellen loodrecht sneden, iets had van den cylindermantel, welke bij den equator als raakcirkel om de aarde was

niet de kortste afstand tusschen die beide punten. De kortste afstand tusschen twee punten op een bol is steeds de „groote cirkel" of „orthodrome", welke door die beide punten wordt bepaald. Naarmate men dus beter bekend werd met de kaart, met de routes enz., werd het voor den zeeman de groote kunst om zooveel mogelijk de groote cirkels te volgen. (De zeeman spreekt van „groot-cirkel-varen"!) en waar tegenwoordig de instrumenten al zeer nauwkeurige plaatsbepalingen veroorloven, is het grootcirkelvaren over iederen willekeurigen afstand mogelijk geworden. Zoolang echter den roerganger geen anderen koers is opgegeven, worden er telkens kleine stukjes loxodromen gevaren. Hoe grooter aantal plaatsbepalingen men doet en hoe grooter het aantal stukjes loxodromen wordt, des te meer benadert men den kortsten (orthodromischen) afstand.

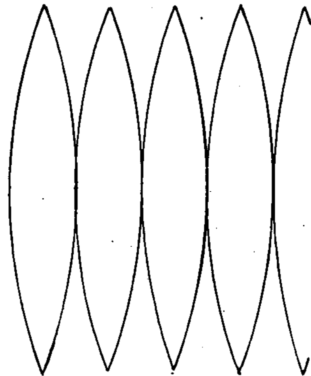


Fig. 26. Wereldkaart in den vorm van bolsegmenten.

§ 24. **Globes. Kaarten. Kaartprojecties. Eigenschappen der kaartprojecties.**

Uit het voorgaande hebben wij kunnen zien, dat de bol tenslotte het eenige middel verschaft om een verkleind beeld van de aardoppervlakte vast te leggen. Maar dan zou ook een ieder zulk een onhandelbaar instrument moeten bezitten, op reis meenemen enz.; en liefst een van groote afmetingen. Ook zou men een globe kunnen stuksnijden in een aantal smalle reepen, welke vrijwel kunnen worden vlak gelegd (zie fig. 26). Inderdaad heeft men dat wel gedaan. Maar een bruikbare kaart, waarop metingen zouden kunnen worden verricht, werd op deze wijze nog niet verkregen.

Om nu een behoorlijk bruikbare vlakke kaart te vervaardigen heeft men allerlei vernuftige teeken- en -rekenmethoden bedacht, waarvan wij er thans eenige zullen bespreken.

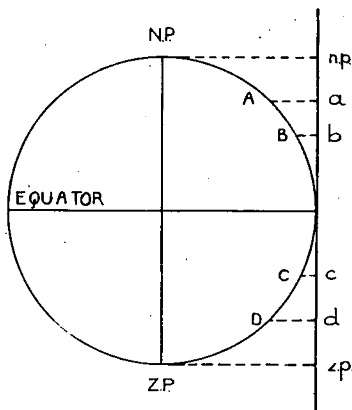


Fig. 27. Orthografische azimutale equatorprojectie.

Kaartprojecties. Het beginsel van het platte vlak werd eigenlijk al ongeveer gevolgd voor ieder der o n d e r d e e l e n van de middeleeuwsche portulanen: Het stukje kaart rondom iedere kompasroos is n.l. niets dan een klein stukje aardoppervlakte, dat men vrijwel vlak kan denken. Op de afbeelding daarvan is t.o.z. van het middelpunt van iedere plaats in de omgeving het juiste azimut[1]) aangegeven. Men spreekt daarom wel van een a z i m u t a l e k a a r t.

Zou men echter dat platte vlak verder uitbreiden, dan volgt het niet meer het gebogen boloppervlak, doch het blijkt te zijn het platte raakvlak aan de bol, met het raakpunt als middelpunt van de teekening.

[1]) In tegenstelling met de sterrenkunde (zie § 5) meet de landmeetkunde het azimut van het noordpunt van den horizon af!

bron af. In werkelijkheid sluit zich daarbij het overglijdingsvlak weer samen tot een geheel en vertoont zich de snijlijn van dit vlak met de aardoppervlakte, het z.g. poolfront der koude luchtmassa's dus, weder als een meer doorloopende lijn.

Aangezien het poolfront de lijn is, waarheen de gradiënten van de paardebreedten en van de pool af gericht zijn, ligt daar de zone van den laagsten luchtdruk. Daar zal bij een tongvormig ingebogen poolfront de depressie zich moeten bevinden, waarheen van alle zijden de gradiënten wijzen. Het centrum dezer depressie ligt ongeveer bij het noordelijkste punt van het poolfront, d.i. waar de „warmte-front-lijn" en de „buienlijn" samenkomen. Naar dat punt wijzen niet alleen de directe gradiënten, doch eveneens (door

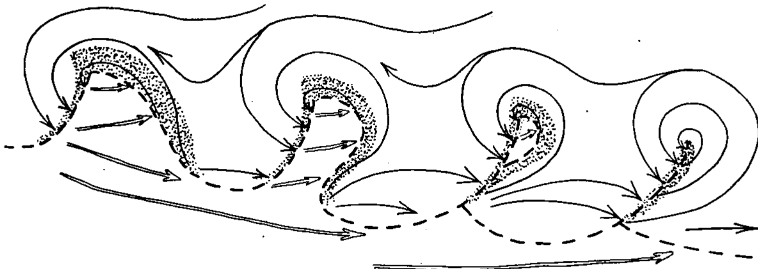


Fig. 58.

de rotatie-afwijking langs een spiraalomweg) de stroomlijnen van de lucht, d.z. dus de werkelijke windbanen. Het sterkst worden deze stroomlijnen naar dat centrum toe getrokken in de omgeving van de warmte-front-lijn, d.i. in het Z. en het Z.O.-deel der depressie. Daar is de opwaartsche beweging van de lucht ook het sterkst. In den rug dringt de poollucht op en schuift wigvormig onder de warme luchtlaag. De cykloon wordt op deze wijze langzamerhand in oostwaartsche richting verplaatst om tenslotte te worden uitgewischt, doch ook om weer door een nieuwe te worden opgevolgd. (Zie fig. 58).

Vérder zullen wij hier niet op deze nieuwe beschouwingswijze van Bjerknes over het ontstaan der cyklonen op hoogere breedten ingaan. Het zou ons te ver voeren en voor ons doel is het ook niet noodzakelijk.

Andere opvattingen. Verschillende andere onderzoekers, waaronder Van Everdingen, meenen vooral uit de talrijke waarnemingen met registreerballons van de temperatuur der hoogere luchtlagen te kunnen bewijzen, dat de naaste oorzaak voor het ontstaan der

In Deli (Sumatra) brengt de droge **„Bohorok"**-wind, uit het Bataksche hoogland dalend, vaak veel schade aan de tabak teweeg. Deze droge valwind ontstaat, wanneer omstreeks Juli, dus ten tijde van het Aziatisch luchtdrukminimum, de noordwaarts gerichte gradiënt boven Sumatra vrij sterk is geworden, zoodat de moesson, in plaats van om Atjeh heen, als het ware over den Barisan heen getrokken wordt.

Niet altijd evenwel veroorzaken dalende winden temperatuursverhooging voor de plaatsen, waar zij aankomen. Dit blijkt o.a. bij de *Bora* en de *Mistral*. De **Mistral** heerscht aan de kusten der Middellandsche zee en in Zuid-Frankrijk. Het is een N.W.-wind, die in den winter van de koude Cevennen daalt, en naar een gebied van lage drukking boven de Middellandsche zee stroomt. Ook deze valwind wordt wel verwarmd bij het nederdalen, doch is altijd nog veel kouder dan de temperatuur der plaatsen, waar hij aankomt. — Met de **Bora,** ook een koude wind, die des winters van het Karstplateau naar de Adriatische zee stroomt en van Triëst tot Albanië somtijds heerscht, is hetzelfde het geval. Koud en warm zijn betrekkelijke uitdrukkingen.

Als **Scirocco** duiden de Italianen een buitengewoon warmen en *vochtigen* zuidenwind aan, die aan de oostzijde van een barometrisch minimum ontstaat (denk aan cyklonale luchtbeweging). De Scirocco is de karakteristieke regenwind voor het winterhalfjaar op de Jonische-Adriatische zeekusten. Over den kam van de Siciliaansche Apennijnen komt de Scirocco echter als *droge heete* föhn-wind in *Palermo* aan!

Tot de lokale winden behooren ook de **dalwind** en de **bergwind,** welke — de eerste overdag, de tweede 's nachts — geregeld in het gebergte plegen op te treden. De oorzaak van beide is hoofdzakelijk te zoeken in de lokaal sterkere verwarming of afkoeling van de dallucht dan die elders op gelijke hoogte.

Overdag zal in de bergdalen door de verwarming van de lucht langs den bodem en de berghellingen een dichtheidsvermindering optreden, welke convectie en in het dwarsprofiel van het dal luchtcirculatie tengevolge heeft. Hierdoor wordt tenslotte de geheele dalluchtmassa verwarmd en bijgevolg soortelijk lichter; het meest zal dit het geval zijn in het nauwe bovendal, waar de verwarmde hoeveelheid lucht relatief klein is t.o.z. van den bodemomtrek van het dwarsprofiel. Boven de kamhoogte van het gebergte verandert er niets aan de luchtdrukking; deze blijft daar overal gelijk aan de buiten het gebergte op dezelfde hoogte. De dichtheidsvermindering van de dallucht moet dus in het dal drukvermindering veroorzaken en wel het meest daar, waar door een relatief sterkere verwarming ook de dichtheid het meest verminderde, d. i. in het bovendal. Hierdoor ontstaat in het lengteprofiel van het dal een dalopwaarts gerichte gradient en bijgevolg een in die richting gaande horizontale luchtstrooming, die echter door de geleidelijke stijging van den dalbodem wrijving en dus stuwing ondervindt, en daardoor in een langzaam stijgenden wind (d. i. de *dalwind*) wordt omgezet.

's Nachts wordt aan het oppervlak de lucht het sterkst afgekoeld, waarbij door de sterkere helling der zijwanden weer dwarscirculatie ontstaat, waardoor de lucht in de daldoorsnede sterker wordt afgekoeld dan die in de vrije atmosfeer op gelijke hoogte. Zoo ontstaat een horizontale gradiënt, die naar den dalmond is gericht, en bijgevolg de *bergwind*.

Neerslag. Als de gecondenseerde waterdroppeltjes van de wolken zich vereenigen en grootere en zwaardere druppels vormen, dalen zij neer; men noemt dit **regen.** De regendroppels worden onder het vallen door vereeniging van meer droppels met elkander grooter en zwaarder.

Wanneer het condensatiepunt beneden 0° C. ligt, zal de waterdamp zonder eerst in water over te gaan, onmiddellijk bevriezen tot fijne ijskristallen; dit is **sneeuw.** Hoog in de lucht gevormde sneeuw zal onder het vallen veelal weer smelten en in waterdroppels overgaan. Zware wolken bestaan niet zelden geheel uit sneeuwvlokken, die bij het neerdalen regen vormen.



Fig. 59. IJzel op een beukenhaag en op eikentakken.

Sneeuwvlokjes, in een omgeving van waterdruppeltjes dalende, groeien uit den damp snel aan tot *losse hagel,* ondoorzichtige kristalcomplexen (NW.-buien in het voorjaar!). Vaste kernen, afwisselend aangegroeid uit damp of uit onderkoeld water, dat bij aanraking met ijs gedeeltelijk stolt, vormen den echten *hagel,* die vooral bij onweer uit hooge cumulonimbuswolken valt. Bevroren waterdruppels (uit een hooge warme laag vallend in een lagere koude), geven *ijsregen.*

Wanneer de hagelkorrels zich onder het vallen nog vergrooten doordat daarop waterdamp (bij een temperatuur beneden 0° C.) uit de omgevende lucht onmiddellijk in kristalletjes overgaat, dan ontstaan ruige hagelkorrels.

Zoodra (in den nanacht) de grond door uitstraling zooveel warmte verloren heeft, dat hij kouder is dan de lucht er boven en dan de diepere grondlagen, dan condenseert daartegen de atmosferische waterdamp en de van onder uit den grond opstijgende waterdamp tot een waterlaagje: de *dauw.*

Heeft de aardoppervlakte daarbij een temperatuur beneden het vriespunt, dan bevriest de atmosferische waterdamp onmiddellijk bij aanraking met den bodem en met de bodemvoorwerpen; er

12. *Pampas-provincie*. De regenval niet aanzienlijk. Jaarlijksche temperatuurschommeling vrij groot. Pampero's zijn hevige winden uit het Z.W.

§ 72. De klimaatindeeling volgens Köppen.

De indeeling van Supan is wel zeer geschikt voor een voorloopige kennismaking met allerlei klimaten, op den duur kan zij echter niet bevredigen, omdat zij niet voldoende duidelijk de klimaatgordels en de overeenkomstige klimaattypen tot uitdrukking brengt. Toch is dit voor een juiste waardeering van de beteekenis dezer klimaten voor de natuurlijke begroeiing en voor het economische leven der menschheid een eerste vereischte. Vele geleerden hebben zich dan ook al met deze classificatie der klimaten beziggehouden. De laatste jaren is er echter in al deze classificaties een, welke door de vaste klimatologisch-statistische basis waarop zij zich stelt vrij algemeen ingang heeft gevonden. Zij werd in 1918 opgesteld door den Duitschen klimatoloog W. Köppen. Wij geven hier zoowel de classificatie van Köppen als de daarop steunende klimaatkaart.

Köppen laat zijn indeeling niet alleen steunen op karakteristische temperaturen en temperatuurschommelingen, en op den neerslag en de periodiciteit van den neerslag, doch hij houdt ook rekening met de verhouding tusschen temperaturen en neerslag, omdat daarvan tenslotte de nuttige uitwerking zoowel van den neerslag als van de temperatuur afhangt. Teneinde nu met zijn indeeling gemakkelijk te kunnen werken, gebruikt Köppen hoofdletters (A, B, enz.) om de hoofdklimaatgordels aan te duiden, en kleine letters voor die eigenschappen (temperatuur; neerslag), welke binnen die gordels bepaalde klimaattypen doen ontstaan. De kleine letters zijn: f (= feucht) voor altijd vochtig, m (= Monsun) voor moessonklimaten, s (= Sommer) voor droogte gedurende den zomer, w (= Winter) voor droogte in den winter. Daarbij kunnen dan verder ook nog hoofdletters worden gebruikt voor de aanduiding van steppenklimaten (S), woestijnklimaten (W), toendraklimaten (T) en hoogteklimaten (H).

A-klimaten. Tropische regen-klimaten.
Geen maand gemiddeld beneden 18°.

Bij een gemiddelde jaartemperatuur van	20°	25°
bedraagt de jaarl. neerslag meer dan	60 cm	70 cm.

1. Vochtig-warme oerwoud-klimaten.
Af = altijd vochtig, in de regenarmste maand nog minstens 6 cm regen.
Am = moesson-regen-klimaat met matig-drogen tijd.
2. Periodiek droge savanne-klimaten.

Bij een jaarl neerslag van	100 cm	150 cm	200 cm	250 cm
heeft de regenarmste maand minstens	6 „	4 „	2 „	0 „

As = savanne-klimaten met drogen zomer.
Aw = savanne-klimaten met drogen winter.

B-klimaten. Droge klimaten.
3. Steppen-klimaten = BS.

Bij een gemiddeld jaartemp. van	25°	20°	15°	10°	5°	0°	—5°
is de jaarl. neerslag minder dan	70 cm	60 cm	50 cm	40 cm	30 cm	20 cm	10 cm.

4. Woestijn-klimaten = B.W.

Bij een gemiddelde jaartemp. van	25°	20°	15°	10°	5°	0°	—5°
is de jaarl. neerslag kleiner dan	35 cm	30 cm	25 cm	20 cm	15 cm	10 cm	5 cm

in het verst van de maan afgekeerde punt van de aarde. Nu is de getijverwekkende kracht van ieder punt te ontbinden in een vertikale componente en een horizontale of tangentieele componente (tangentieel t.o.z. van de aardoppervlakte; tangens = raaklijn; tangentieel = volgens de raaklijn!). Berekening leert nu, dat de vertikale componente van de getijverwekkende kracht haar grootste positieve waarde bereikt, als de zenitsafstand van de maan nul is; de versnelling van de zwaartekracht (g) ondergaat dan door de tegenwerkende kracht op dat punt een vermindering van 2 vg = 0.00000011228 g, (waarbij $v = \frac{1}{fk_3}$. Hierin is f = 81.4; d.i. de verhouding van de massa's van aarde en maan; en k = 60.26, d.i. de afstand van de maan uitgedrukt in aardstralen) —; daarentegen blijkt voor de plaatsen met een zenitsafstand 90° ook nog een vertikale kracht te werken, zoodat daar de zwaartekracht vermeerderd wordt met vg = 0.00000005614 g. — Als men nu weet, dat de zwaartekracht op 1 m hoogte boven het oppervlak der aarde nog slechts met 0.000000313 g verminderd wordt, dan blijkt, dat de grootste

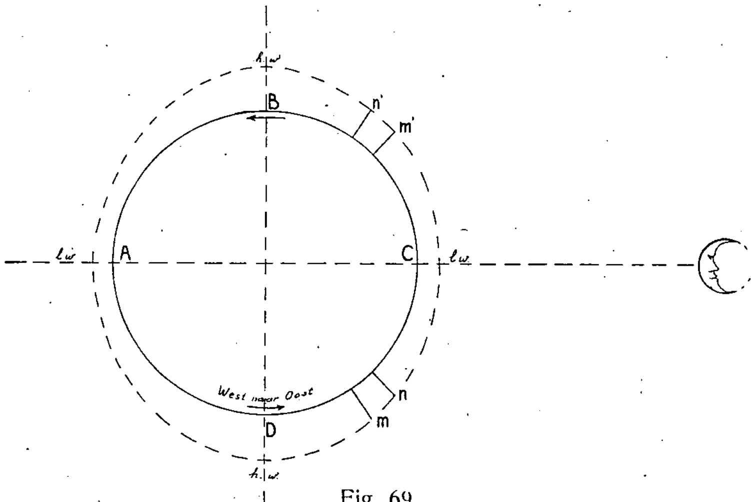


Fig. 69.

schommeling door de maan in de zwaartekracht aangebracht (n.l. 0.00000011228 g + 0.00000005614 g) nog maar de helft bedraagt van de verandering, welke door dat hoogteverschil van 1 m wordt veroorzaakt. Dan is gemakkelijk in te zien, dat deze vertikale componente van de getijverwekkende kracht (zie fig. 66) toch niet heel veel te beteekenen heeft.

Berekening leert, dat zij op een niet-roteerende aarde, die geheel door een 3000 m diepen oceaan zou zijn omgeven, zoodat dus het water allen tijd zou hebben den juisten evenwichtsstand in te nemen, een verschil zou geven tusschen de lange en de korte as van de tot een ellipsoïde verbogen zee-oppervlakte van slechts 0.05 cm.

De horizontale of tangentiëele componente (zie fig. 66) der getijkracht bereikt haar grootste waarde als de zenitsafstand 45° en 135° bedraagt, n.l. ongeveer $^3/_2$ vg; de schommeling dezer kracht is 2 maal $^3/_2$ vg, dat is alzoo even groot als die van de vertikale componente.

Terwijl de vertikale componente slechts vervormend kon werken op een waterkolom, welke gemiddeld niet meer dan 3000 m hoogte heeft, werkt de gemiddeld ongeveer even groote horizontale componente over een heel

behouden gebleven. Overigens krijgt het gebergte nu verder door de normale verweering en de regenafspoeling de gewone ronde vormen. Alleen de vorm der hoofddalen (een breede *trogvorm* of U-vorm: _/) wijst nog op de vroegere gletsjerwerkzaamheid. De zijdalen monden vaak hoog in de flank der hoofddalen, doordat de hoofdgletsjers door hun grootere massa en daardoor grooteren druk op den dalbodem veel meer uitslijpend werkzaam waren en dieper het gebergte uitschuurden dan de lichtere zijgletsjers. Men noemt dit verschijnsel *oververdieping*. De latere zijbeken vormden hier bij deze *zwevende* dalmondingen watervallen en vervolgens diepe



Fig. 117. Glaciaal trogdal: Het Lauterbrunnendal in Zwitserland.

erosiekloven of ravijnen (in Zw.: „Klamm"). (Zie fig. 117). Zwevende zijdalen zoowel als de hoofddalen, zij alle zijn echter trogdalen, als gevolg van de eigenaardige uitschurende werkzaamheid van de gletsjers (zie fig. 115*c*).

De door klimaatsverbetering ijsvrij geworden gebergten vertoonen, ook in hun hoogste deelen, een enkele maal nog de sporen van de vorstversplintering (smalle kam- en graatvormen).

De bodem der breede dalen en de door het landijs overschoven rotsbodems vertoonen een eigenaardig type van rondgeslepen rotsbulten, (z.g. rondkoppen of *bultrotsen*), waarin de grondmoreenen diepe krassen in de bewegingsrichting van het landijs ingroefden. De fjelden van Skandinavië zijn grootendeels zulke glaciaal afgesleten landschappen uit den IJstijd.

met de luchtbeweging in verband? — Welke wolkenvormen kent gij? — Wat verstaat men onder regenwaarschijnlijkheid?

Waardoor neemt de *hoeveelheid* regen af naar de polen, terwijl de *regenwaarschijnlijkheid* in die richting toeneemt?

Waardoor hebben tusschen 35° NBr. en 35° ZBr. de oostkusten der kontinenten den meesten regen, en verder N. en Z. de westkusten? — Welken invloed hebben de berghellingen op de geografische verbreiding van den regen?

§ 65. Verklaar het ontstaan: 1. der *tropische regens;* 2. der *moessonregens;* 3. der *subtropische winterregens* en hun verbreiding; 4. der *kontinentale zomerregens.*

§ 66. Wat weet ge van de verbreiding van den sneeuwval?

§ 67. Welk verband bestaat er tusschen onweders en regenvorming? — Wat weet gij van de verbreiding der onweders en wat van de verdeeling over het jaar? — Hoe is het met de onweders in de woestijnen?

§ 68. Welke klimaattypen kan men aannemen? — Wijs karakteristieke verschillen aan tusschen *land-* en *zeeklimaat* in de *heete* en in de *gematigde zonen.* (Temperatuurschommelingen, neerslag, tijd van regenval). Ga uit het Jaaroverzicht voor 1931 (plaat 10) de elementen van ons Nederlandsche klimaat na en zie in hoeverre zij in dat jaar van de normale gemiddelden afweken. — Welke eigenschappen kenmerken het *hoogteklimaat?* Waardoor?

§ 69. Wat zijn de karakteristieke verschillen tusschen het klimaat der tropen en dat der gematigde zonen?

§ 70. Welken invloed heeft het klimaat op de levende wereld? — Verband tusschen planten en dieren en verbreiding van het licht; warmte, vochtigheid en plantengroei. — Tusschen klimaatzonen en plantenformaties (zie ook § 125). — Invloed van klimaat op de menschen.

§ 71. Wat zijn klimaatprovinciën? — Welke neemt Supan aan? — Verklaar het klimaat van elk dezer klimaatprovinciën.

§ 72. Waarop steunt de klimaatindeeling van Köppen? — Wat beteekenen de volgende *klimaatformules?* beukenklimaat Cfb, ericaklimaat Csb, olijvenklimaat Csa, espinal- (een hard scherppuntig gras) klimaat BShw, tragant- (steppestruik in Voor-Azië!) klimaat BSs, prairieklimaat BSk, maïsklimaat Cfx, berkenklimaat Dfc, eikenklimaat Dfb. — En de volgende klimaatformules? Singapore Af, Rangoon Amw, Colombo Amw'', Surate Aw, Madras Aw', Cairo BW, Addi Ugri BShw, Bagdad BShs, Lugansk BSkw, Nijldelta Bn'', Allahabad Cwg, Tucuman Cw, Buenos Aires Cfx', New Orleans Cfa, Washington Cfa, Hamburg Cfb, Palermo Csa, Samarkand Csax, Valparaiso Csb, Omaha Dfax, Moskou Dfb, Tobolsk Dfc, Peking Dwa, Nertsjinsk Dwc, Jakoetsk Dwd, Jakobshaven (Groenland) ETl, Grimsey (op IJsland) ETM, Mac Murdo-Sound ET.

II. *De Hydrosfeer of het water op aarde.*

§ 73. Hoe is de verhouding van water en land op aarde? Wat zijn *bijzeeën;* wat *middelzeeën;* wat *randzeeën?* — Waar ligt de pool van de vastelands-helft der aarde; waar van de oceanische helft?

Wat verstaat men onder A. P.? En N. A. P.? Is dit een horizontaal vlak?

§ 74. Wat weet gij van de diepte der zee? — Welke zijn de diepste troggen? — Vergelijk de diepte der zeeën met de hoogte der kontinenten.

Waardoor verschilt het relief van den zeebodem van dat van het vasteland? — Vindt men op den zeebodem een echt berglandschap?

Waar begint de eigenlijke zeegrens? — Wat is een kontinentaal plat? Noem voorbeelden?

INHOUDSOPGAVE.

A. EERSTE BEGINSELEN DER WISKUNDIGE AARDRIJKSKUNDE.

I. DE AARDE, HAAR GEDAANTE EN BETREKKING TOT DE ZON.

II. DE MAAN EN HAAR BETREKKING TOT DE AARDE.

III. IETS OVER KAARTEN EN KAARTPROJECTIES.

B. BEGINSELEN DER NATUURKUNDIGE AARDRIJKSKUNDE.

I. DE DAMPKRING.

Temperatuur van den dampkring.

Pag.

III. DE LITHOSFEER.

ENDOGENE WERKINGEN IN DE AARDKORST.

Vulkanisme.

Bewegingen van de aardkorst.

De bouw (tektoniek) van de aardkorst. Gebergten.

EXOGENE KRACHTEN.

IV. HET LEVEN OP AARDE.

---

65. In een kegel een bol te construeeren.

66. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen MA en MB. P ligt op 't verlengde van MB, Q op 't verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkelomtrek snijden. Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2$ is. (r is de straal).

II. ALGEBRA.

1. De vorm $x^4 - ax^3 - (6a + 5b)\, x^2 + abx + 144$ is deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b en ontbind daarna de vorm in factoren van de 1e graad in x.

2. Gegeven de vergelijking

$$(a^2 + 2)\, x^2 + (a + 1)\, x + (a^2 - 4a) = 0.$$

Voor welke reeële waarden van a heeft het product van de wortels een uiterste waarde?

3. Los x op uit: $\sqrt{x^2 - 8x + 31} + (x - 4)^2 = 5$.

4. Gegeven de vergelijking: $x^2 + mx + 2m - 14 = 0$. Voor welke waarde van m is de som van de kwadraten der wortels minimum?

5. Maak een graphische voorstelling van de functie $y = x^2 - 5x - 6$. Bepaal de snijpunten met de assen en het minimum. Voor welke waarden van x is de functie positief, en voor welke negatief?

6. Ontbind $a^{12} - b^{12}$ in factoren.

Schrijf de uitkomst op van het quotient $\dfrac{a^{12} - b^{12}}{a^3 + b^3}$.

Noem de merkwaardige quotienten en bewijs ze.

7. Van de vergelijking $4x^5 - 22x^4 + 30x^3 + px^2 - 34x + 12 = 0$ is één der wortels $= 3$. Bepaal p en de andere wortels. Bewijs, dat een veelterm, die nul wordt voor $x = 3$, deelbaar is door $x - 3$.

8. Maak een graphische voorstelling van de functie $y = -x^2 + 3x + 4$. De functie $ax^2 + bx + 42$ bereikt haar maximum voor $x = -3$.

Dit maximum is gelijk aan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$.

Bepaal a en b, en maak een graphische voorstelling van de functie.

9. Hoeveel merkwaardige quotienten kent gij? Noem ze op en bewijs er één.

10. Gegeven de breuk $\dfrac{x^2 + (p - 2)\, x - p}{x^3 + (m + 2)\, x^2 - (8m + 2)\, x - 120}$.

De noemer is deelbaar door $x - 5$. Bepaal m en daarna de waarde van p, waarvoor de breuk te vereenvoudigen is.

Noem en bewijs de reststelling.

11. Symmetrische functies van de wortels van een vierkantsvergelijking. Afhankelijkheid en strijdigheid van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden.

12. Maak een graphische voorstelling van de functie $y = 2^x$. Oneigenlijke machten!

13. Los x op uit:

$$(17x^2 + 83x - 100)\{(x-3)^{1/2} + (x+2)^{1/2}\} = \\ = (17x^2 + 83x - 100)(3x+4)^{1/2}.$$

14. Schets de graphiek van $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x + 1}$.

15. Eveneens van $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$.

16. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x(x-1)(x+1)$. Bepaal de rest zonder de deeling uit te voeren. (Denk om de algemeene gedaante van de rest!).

17. Wanneer bestaat $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$? Bewijs, dat $\sqrt{x^2 + 3x + 10}$ altijd bestaat.

Bepaal $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 - 3x - 10})$. Denk daarbij aan de herleiding van $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

18. Voor welke waarden van a is voor alle waarden van x

$$y = x^2 - (a-3)\,x - (a-3) > 0?$$

19. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor

$$(y - x^2)(y - x - 1) > 0 \text{ is.}$$

20. In welk geval is $\frac{ax + b}{cx + d}$ onafhankelijk van x?

Voor welke waarden van a is $\frac{(a-1)\,x + 3a + 1}{x + (a^2 + a + 1)}$ onafhankelijk van x?

21. Bewijs, dat $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ deelbaar is door 17.

23. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, die tot wortels heeft $(3 - \sqrt{2})$ en $(3 + \sqrt{2})$ en bovendien de complexe wortels van $x^3 - 1 = 0$.

24. Voor welke waarden van x ligt de waarde van de functie

$$y = 5^{\frac{1}{x^2-x-5}}$$

tuschen 1 en 5?

25. Onderzoek de graphiek van de functie

$$y = \frac{x-5}{x^2+3x-4}.$$

26. Gegeven de vergelijking $x^2 - (a+3)x + (2a-7) = 0$. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, waarvan 2 wortels evengroot zijn als die van de gegeven vergelijking, terwijl de beide andere wortels elk één grooter zijn.

Bepaal daarna voor welke waarde van a de som van de kwadraten der vier wortels minimum is.

27. Voor alle waarden van x geldt

$$(p+1)x^2 - 2(p-1)x + 3p - 3 < 0;$$

welke waarde moet p dan hebben?

28. Van de vergelijking $x^3 - ax^2 - 13x + 5a = 0$ is $x_1 = 5$. Bepaal a en vervolgens $x_2^3 + x_3^3$. (Reststelling!)

29. Als a, b en c de zijden zijn van een driehoek, dan zijn de wortels van $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ zeker complex. Bewijs dit.

30. $y = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x-5}$; schets de graphiek.

31. De vorm $3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deeling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking op, die men krijgt door de vorm nul te stellen.

32. De graphiek van de functie $y = \frac{8x+7}{x^2+ax+b}$ heeft 2 asymptoten evenwijdig aan de Y-as nl. voor $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teeken de graphiek.

33. Onderzoek de graphiek van de functie

$$y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}.$$

34. Herleid $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$. Als dit geschiedt door de vorm gelijk te stellen aan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ enz., welke eigenschap wordt dan daarbij gebruikt. Bewijs deze.

35. Van de vergelijkingen $3x^2 - 13x + 2p = 0$ en $2y^2 - 11y - 6 = 0$ is gegeven, dat een der wortels van de tweede

vergelijking 3 × zoo groot is als een der wortels van de eerste. Bepaal p.

36. De vorm $v \equiv (a+2)x^4 - (a+1)x^3 + 2bx^2 + (b+14)x + 6$ is deelbaar door $(x + 2)$ en geeft bij deeling door $x - 1$ tot rest -36. Bepaal a en b. Los daarna op $v = 0$.

37. De vorm $\frac{m(x-2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft tot grenswaarde $\frac{1}{2}$. Bepaal a en m. Splits daarna de vereenvoudigde breuk in de som van 3 breuken:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

38. Als gegeven is:

$$x^2 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m \equiv (x^2 + ax + t)(x^2 + bx + t)$$

bepaal dan m, a, b en t. Los daarna op de vergelijking:

$$x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m = 0.$$

39. De vormen $x^2 - (a + 2)x + 2a + 4$ en $x^2 - 4ax + 8a + 4$ hebben een even groot minimum. Bepaal a. Breng daarna één der beide functies in teekening.

40. Gegeven de vergelijking $x^2 - (3m-2)x + (3m^2 - 3m - 2) = 0$. Voor welke waarde van m is $x_1^3 + x_2^3$ maximum?

41. Gegeven $x^2 - (a - 3)x - (a - 3) = 0$. Bereken $x_1^2 + x_2^2$. Voor welke waarde van a is dit minimum? Gevonden wordt, dat de minimumwaarde -1 is voor $a = 2$. Hoe komt het, dat men hier voor de som van twee kwadraten een negatieve uitkomst vindt? Wat is dus op te merken van de wortels van $x^2 + x + 1 = 0$? Los ook eens op $x^3 = 1$. Hoeveel zal zijn x_i^{19} (de 19e macht van één der imaginaire wortels).

42. Los x en y op uit:

$$\frac{(5x - 3y + 1)(6x - 3y + 4)}{4x + 3y - 7} = 0$$

$$\text{en} \quad 2x - y + 2 + \sqrt{2x - y + 3} = 5.$$

43. Behandel de graphiek van

$$y = \frac{(x+5)(x-3)}{x-4} \equiv x + 6 + \frac{9}{x-4}.$$

44. Waar in het XOY-vlak liggen de punten, waarvoor $z^2 - 3z + (3x + 2y) = 0$ reeële wortels heeft?

45. Hoe groot is het aantal oplossingen van $2x - y = 3$? Voor welk stel is nu $x^2 + y^2$ zoo klein mogelijk?

46. Herleid $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. Schat de waarde van $2^{-0,00001}$.

47. Bepaal $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$.

Vergelijk de graphieken van

$$y = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3} \quad \text{en} \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

met elkaar.

48. Bewijs, dat $17\,(x^{23} - 1) - 23\,(x^{17} - 1)$ deelbaar is door $(x - 1)^2$.

49. Ga het teeken na van de breuk $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$ door een graphische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.

50. De vergelijkingen: $5x^3 - 5ax^2 - 2\,(3a - 10)\,x + 24a = 0$ en $x^2 - ax + 4 = 0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal a en los de vergelijkingen op.

51. De vorm $ax^2 + bx + c$ bereikt zijn uiterste waarde voor $x = -1$ en geeft bij deeling door $(x + 2)$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in x. Bepaal a, b en c.

52. Gegeven de vergelijking $3x^2 - (a - 1)\,x + 2a - 13 = 0$. Voor welke waarde van a is de som van de kwadraten der wortels zoo klein mogelijk?

53. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 tot een uiterste waarde. Bepaal p en onderzoek de graphiek van de functie.

54. Door $y = (a - 1)\,x^2 - (a + 2)\,x + (a - 6)$ worden, als we a laten varieeren van $-\infty$ tot $+\infty$, allerlei parabolen voorgesteld. Welke waarden moeten we aan a geven, opdat hierdoor parabolen worden voorgesteld, die geheel boven de X-as liggen?

55. Bewijs, dat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ deelbaar is door $a + b + c$.

56. In welk geval is $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$?
Wanneer hebben beide dezelfde nulpunten?
Wanneer hebben ze één nulpunt gemeen?

57. Bepaal het maximum van $5 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2$ met de correspondeerende waarden van x.

58. Als de lijn, voorgesteld door $y = mx$ moet raken aan de

kromme, voorgesteld door $y = x^2 - 3x + 4$, bepaal dan de waarde van m.

59. Voor welke waarden van x is $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{(x-6)(3x^2+9x+7)} \gtrless 0$?

60. Voor welke geheele waarden van x is

$$3x^2 + 4x < 84 > x^2 - 17x?$$

61. Voor welke waarde van a kan de breuk:

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^3 - (a-2)x^2 - 10x + a^2 - 1}$$

vereenvoudigd worden?

62. Is het mogelijk, dat $mx^2 + (m-1)x + (m-1) > 0$ is voor alle waarden van m en alle waarden van x?

63. Los x op uit:

$$x + 3 + \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{20}{x-3}.$$

64. De vorm $2x^5 - ax^4 + bx^2 - 7$ geeft bij deeling door $(x-1)$ tot rest 2 en bij deeling door $(x-2)$ tot rest 61. Bepaal a en b en vervolgens de rest bij deeling door $(x-2)(x+1)(x-1)$ zonder de deeling uit te voeren.

65. De vorm $ax^2 + bx - 42$ bereikt zijn maximumwaarde voor $x = -3$ en die maximumwaarde is $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$. Bepaal a en b.

66. De vorm $x^4 - ax^3 - (10a + 2b)x^2 + (ab + 159)x + 144$ deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b.

67. De graphische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x + 1}$$

snijdt de X-as in A $(-1,0)$ en de Y-as in B $(0,2)$. Verder is de lijn $y = -1$ een asymptoot. Bepaal a, b en c en schets de graphiek.

68. De graphische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b-1)x - 6}{x^2 + (a+3)x - (2b+1)}$$

snijdt de X-as in A $(+2,0)$ en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal a en b en schets de graphiek.

69. Van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2ax - (a+1)y + a - 1 = 0 \\ (3a+4)x - (3a+1)y - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

verhouden x en y zich als 5 : 7. Bepaal a en de wortels x en y.

70. Men vraagt a zóó te bepalen, dat de breuk

$$\frac{x^2 - ax + 8}{x^2 + ax - 16}$$

71. Gegeven de parabool $y = x^2 - 10x + 21$. Men vraagt de vergelijking te bepalen van de parabolen, die de X-as in dezelfde punten snijden als de gegeven kromme, terwijl hun uiterste waarde absoluut genomen het dubbele is.

72. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 3?$$

Toelichten met een graphische voorstelling.

73. Bepaal a, b en c zóódanig, dat de vorm:

$$(a + b)\,x^2 + (2a + b)\,xy + cy^2 - x + 13y - 15$$

deelbaar is door $2x - y + 5$.

74. Bepaal a en b zóódanig, dat de vorm

$$x^4 - 2x^2 + ax + b$$

deelbaar is door $x^2 - x - 2$.

75. De functie $y = ax^2 + {}^8/_3\; x + c$ bereikt haar maximum 4 voor $x = 3$. Bepaal a en c en schets de graphiek.

76. Bewijs, dat elke willekeurige macht van 5, verminderd met 5 deelbaar is door 20.

77. De graphiek van de functie $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de X-as in A $(-4,0)$ en B $(+2,0)$ en de Y-as in C $(0,-8)$.

Bepaal a en b en schets de graphiek. Daarna ook die van

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

78. De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerdert en in een onvolledige, als men ze met 3 vermindert. Bepaal p en q.

79. Onderzoek de graphiek van de functie

$$y = x + (10 - 2x)^{1/2}.$$

80. Schets de graphiek van $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ en daarna die van $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

81. De functies $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ en $y' = x^3 + x^2 - 22x - 40$ hebben hetzelfde nulpunt. Schets de graphieken.

82. Bepaal na vereenvoudiging het teeken van

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

voor verschillende waarden van x.

83. Voor welke waarden van a, b en c is

$$ax^2 + bxy + cy^2 - x + 19y - 15$$

deelbaar door $x + 2y - 3$? Wanneer is

$$(x + 2y - 3)(2x - y + 5) \gtrless 0?$$

84. Splits $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in enkelvoudige breuken.

85. Vereenvoudig $\sqrt{37 + 20\sqrt{3}}$.